

Anwendungsaufgaben zur e- und ln-Funktion

1.0 Die Anzahl p der Pilze in einer Kultur in Abhängigkeit von der Zeit t in Stunden wird

für $t \geq 0$ durch den Funktionsterm $p(t) = \frac{1000}{1+7e^{-t}}$ beschrieben. Im Funktionsterm und bei Berechnungen wird auf Benennungen verzichtet. (Abitur 2005 AI)

1.1 Bestimmen Sie die Anzahl der Pilze zum Zeitpunkt $t = 0$ und nach sehr langer Beobachtungszeit. Berechnen Sie den Zeitpunkt t_1 , zu dem die Pilzkultur 875 Pilze enthält. ○

1.2 Nun wird die Ableitungsfunktion $\dot{p}: t \mapsto \dot{p}(t)$ mit $\dot{p}(t) = \frac{dp(t)}{dt}$ und $t \geq 0$ betrachtet.

Interpretieren Sie $\dot{p}(t)$ im gegebenen Sachzusammenhang und zeigen Sie, dass die Anzahl der Pilze im gesamten Beobachtungszeitraum echt monoton zunimmt. ⊗

(Teilergebnis: $\dot{p}(t) = \frac{7000e^{-t}}{(1+7e^{-t})^2}$)

1.3 Ohne Nachweis kann im Folgenden verwendet werden, dass $\dot{p}(t)$ für $t_2 = \ln 7$ seinen maximalen Wert annimmt. Zeichnen Sie den Graphen von $\dot{p}$ für $0 \leq t \leq 6$ unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und der Berechnung weiterer geeigneter Funktionswerte in ein Koordinatensystem. ⊗

(Maßstab: t -Achse: $1h \triangleq 2 \text{ cm}$; $\dot{p}$ -Achse: $100 \text{ Pilze/h} \triangleq 1 \text{ cm}$)

1.4 Zeichnen Sie unter Verwendung der Eigenschaften des Graphen von $\dot{p}$ den Graphen von p in das Koordinatensystem von 1.3. ⊗

(Maßstab: t -Achse: $1h \triangleq 2 \text{ cm}$; p -Achse: $100 \text{ Pilze} \triangleq 1 \text{ cm}$)

- 2.0 Unter natürlicher Radioaktivität versteht man die Eigenschaft von bestimmten Atomkernen, sich unter Aussendung von Strahlen umzuwandeln bzw. zu zerfallen. Die Größe, die diese Umwandlung beschreibt, ist die Aktivität $A(t)$. Sie gibt die Anzahl der radioaktiven Zerfälle pro Minute zu einer bestimmten Zeit t an. Die Aktivität ändert sich im Laufe der Zeit nach folgendem Gesetz: $A(t) = A_0 \cdot e^{-k \cdot t}$. Die Zeit t ($t \geq 0$) wird in Jahren angegeben, A_0 ist die Aktivität zur Zeit $t = 0$ und k ist die sogenannte Zerfallskonstante.
- Für alle folgenden Aufgaben wird der radioaktive Kern des Kohlenstoffs C14 untersucht. Bei Berechnungen kann auf die Verwendung von Einheiten verzichtet werden. (Abitur 2005 All)

- 2.1 Zur Zeit $t_1 = 550$ Jahre beträgt die Aktivität $14 \frac{\text{Zerfälle}}{\text{Minute}}$, zur Zeit $t_2 = 1162$ Jahre beträgt

die Aktivität $13 \frac{\text{Zerfälle}}{\text{Minute}}$. Ermitteln Sie die Werte von A_0 und k . ☹

(Ergebnisse: $A_0 \approx 15 \frac{\text{Zerfälle}}{\text{Minute}}$; $k \approx 0,121 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{Jahre}}$)

- 2.2 Im Jahre 1947 wurden in einer zerfallenen Tempelruine am Toten Meer die berühmten „Qumran Papyrus-Rollen“ gefunden, die Aufschluss über die Authentizität des Alten Testaments gaben.

Um deren Echtheit zu überprüfen, wurde die sogenannte „C14-Methode“ angewandt. Dabei wird ausgenutzt, dass jeder lebende Organismus unter anderem radioaktive C14-Atome aus der Luft aufnimmt, wobei deren Anteil über Jahrtausende als konstant betrachtet wird. Sobald ein Organismus stirbt, endet die Aufnahme von C14-Atomen. Der in dem toten Organismus vorhandene Kohlenstoff C14 zerfällt nach dem unter 2.0 bzw. 2.1 formulierten Gesetz.

Im Jahr 1947 ergab die Untersuchung einer Probe dieser Papyrus-Rolle, dass diese nur noch 79 % der Aktivität A_0 besaß, die an lebenden Organismen festzustellen ist. Berechnen Sie, vor wie vielen Jahren ungefähr die Papyrusstauden geerntet wurden, die zur Herstellung der Qumran-Rollen verwendet wurden. ☹

- 2.3 Bekannt ist die Zerfallskonstante k ist der Begriff der Halbwertszeit t_H . Die Halbwertszeit gibt die Zeitspanne an, nach der sich die Aktivität jeweils halbiert hat. Drücken Sie die Halbwertszeit t_H in Abhängigkeit von der Zerfallskonstanten k aus und berechnen Sie anschließend den Wert von t_H für den Kern des Kohlenstoffs C14. ☹

3.0 Bei Patienten, die zur Nahrungsaufnahme nicht fähig sind, wird die künstliche Ernährung durch Infusion von Glucose in die Blutbahn durchgeführt. $U(t)$ bezeichnet den Glucosegehalt im Blut eines Patienten (in mg/dl) zum Zeitpunkt t (in Stunden) der Behandlung mit $t \geq 0$ und es sei $u_0 = U(0)$. Dem Patienten wird Glucose mit einer konstanten Rate pro Stunde zugeführt. Der Abbau der Glucose erfolgt proportional zu dem vorhandenen Glucosegehalt mit der Konstanten $\alpha > 0$. Mit diesen Annahmen gilt (ohne Berücksichtigung der Einheiten): $U(t) = 110 + (u_0 - 110)e^{-\alpha t}$

Bei der Rechnung kann auf Einheiten verzichtet werden. Die Ergebnisse sind auf zwei Nachkommastellen zu runden. (Abitur 2007 AI)

3.1 Bei einem Patienten, bei dem der Glucosegehalt im Blut am Anfang der Behandlung $u_0 = 60$ [mg/dl] beträgt, wird nach drei Stunden ein Glucosegehalt im Blut von $U(3) = 90$ [mg/dl] festgestellt. Bestimmen Sie für diesen Fall den Wert der Konstanten α . ☐

3.2 Setzen Sie nun $\alpha = 0,31$ und berechnen Sie den Glucosegehalt im Blut des Patienten nach fünf Stunden. ☐

3.3 Bestimmen Sie den Grenzwert der Funktion U für $t \rightarrow \infty$ und interpretieren Sie diesen im Sinne der vorliegenden Thematik. ☐

4.0 Zur Versorgung der Raumstation ISS wird von Cap Canaveral eine Rakete gestartet. Die Momentangeschwindigkeit der Rakete lässt sich, bis der gesamte Treibstoff verbrannt ist, näherungsweise mit der Funktion $v: t \mapsto \ln(100) - 2 \cdot \ln(10 - 0,1 \cdot t)$, $D_v = [0; t_E]$ beschreiben. Dabei ist t die Zeit, t_E die Brenndauer jeweils in Sekunden und $v(t)$ die Geschwindigkeit in Kilometer pro Sekunde.

Bei den Berechnungen kann auf die Einheiten verzichtet werden, die Ergebnisse sind gegebenenfalls auf zwei Nachkommastellen zu runden. (Abitur 2007 AI)

4.1 Berechnen Sie die Geschwindigkeit der Rakete zwei Sekunden nach dem Start und den Zeitpunkt t_1 , zu dem die Geschwindigkeit 0,3 km/s beträgt. ☐

4.2 Nach dem Start wird die Masse m der Rakete (in Tonnen) durch die Verbrennung des Treibstoffs kleiner. Es gilt: $m(t) = 10 - 0,1 \cdot t$ $D_m = D_v$. Beim Start bestehen 85 % der Gesamtmasse aus Treibstoff. Berechnen Sie den Zeitpunkt t_E , zu dem der gesamte Treibstoff verbrannt ist. ☐

4.3 Bestimmen Sie das Monotonieverhalten von v und ermitteln Sie die maximale Geschwindigkeit der Rakete. ☐

4.4 Zeigen Sie, dass $s: t \mapsto (200 - 2t) \cdot \ln(10 - 0,1t) + t \cdot (2 + \ln(100)) - 200 \cdot \ln(10)$ $D_s = D_v$ eine Stammfunktion von v ist, berechnen Sie $s(t_E) - s(0)$ und interpretieren Sie diesen Wert im Sinne der Thematik. ☐

- 5.0 In einem Bach steigt nach einem Wolkenbruch die Wasserdurchflussmenge deutlich an. An einer Messstelle wird die Wasserdurchflussmenge $D(t)$ (in m^3/h) in Abhängigkeit von der Zeit t (in h) beobachtet. Frühere Messungen ergaben, dass für die Wasserdurchflussmenge für $t \geq 0$ annähernd die Beziehung $D(t) = c \cdot t^2 \cdot e^{-t+5} + 20$ gilt, wobei c eine positive niederschlagsabhängige Konstante ist. Im Funktionsterm und bei den Berechnungen wird auf die Angabe von Einheiten verzichtet. Die Ergebnisse sind auf zwei Nachkommastellen zu runden. (Abitur 2007 All)
- 5.1 Nach 30 Minuten beträgt die Durchflussmenge $25,6 \text{ m}^3/\text{h}$. Ermitteln Sie damit den Wert der Konstanten c . ☐
(Ergebnis: $c \approx 0,25$)
- 5.2 Ermitteln Sie den Zeitpunkt t_2 , ab dem die Durchflussmenge wieder abnimmt. ☒
- 5.3 Ab einer Durchflussmenge von $42 \text{ m}^3/\text{h}$ ufer der Bach aus. Stellen Sie fest, ob eine Ausuferung stattfindet. ☐
- 5.4 Bestimmen Sie den Wert von $D(t)$, der sich auf Grund der angegebenen Beziehung langfristig einstellt. ☐
- 5.5 Gegeben ist die Funktion V mit $V(t) = -0,25 \cdot (t^2 + 2t + 2) \cdot e^{-t+5} + 20t + 0,5 \cdot e^5$ für $t \geq 0$. Zeigen Sie, dass V eine Stammfunktion von D ist. Berechnen Sie das Integral $\int_0^6 D(t) dt$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sinne der vorliegenden Thematik. ☒

6.0 Ein Studio für Ernährungsberatung erstellt nach dem Motto „Abnehmen braucht Zeit“ für einen Kunden eine persönliche Gewichtskurve für die geplante Diät. Die Funktion $G(t) = 20 \cdot e^{-0,2t} + 70$ mit $t \geq 0$ gibt näherungsweise das Gewicht in kg nach t Monaten an. Auf die Angabe von Einheiten bei den Berechnungen kann verzichtet werden. (Abitur 2008 All)

6.1 Bestimmen Sie das Gewicht des Kunden zu Beginn der Diät und das Idealgewicht G_{ideal} , das der Kunde nach sehr langer Anwendung der Diät erreichen soll. ☐
(Teilergebnis: $G_{\text{ideal}} = 70$ [kg])

6.2 Ermitteln Sie, nach welcher Dauer t_1 der Diät der Kunde nach diesem Plan 75 % der angestrebten Gewichtsreduzierung erreichen wird. ☒

6.3 Die vorgeschlagene Diät soll mit einer anderen Diät verglichen werden, bei der es angeblich möglich ist, die zu Beginn der Kur vorliegende Gewichtsabnahmerate $\dot{G}(0)$ konstant beizubehalten. Bestimmen Sie die sich dann ergebende Zeitspanne t_2 , nach der das angestrebte Idealgewicht erreicht würde. ☒

7.0 Für die Erprobung eines neuen Medikaments wird im Labor die Entwicklung einer Pilzkultur in einer Nährlösung unter dem Einfluss des Medikaments beobachtet. Man stellt fest, dass sich die Anzahl N der Pilze in Abhängigkeit von der Zeit t in Stunden (h) durch folgende mathematische Funktion näherungsweise beschreiben lässt:
 $N: t \mapsto N_0 \cdot e^{(3t-t^2)}$ mit $t \geq 0$. Dabei bedeutet N_0 die anfänglich vorhandene Anzahl von Pilzen. Für die Rechnungen kann auf die Verwendung von Benennungen verzichtet werden. (Abitur 2010 AI)

7.1 Die erste Zählung ergibt nach 30 Minuten 1745 Pilze. Bestimmen Sie damit die Anfangszahl N_0 . ☐
(Ergebnis: $N_0 = 500$)

7.2 Berechnen Sie den Zeitpunkt, an dem die maximale Anzahl von Pilzen vorhanden ist und bestimmen Sie diese maximale Anzahl. ☒
(Zur Kontrolle: $N(t) = 500 \cdot (3-2t) \cdot e^{(3t-t^2)}$)

7.3 Berechnen Sie den Zeitpunkt t_1 , an dem die Kultur am stärksten wächst und den Zeitpunkt t_2 , an dem die Kultur am stärksten abnimmt und geben Sie die Bedeutung dieser beiden Zeitpunkte für den Graphen der Funktion N an. ☒

7.4 Bestimmen Sie den Zeitpunkt, ab dem die Pilzkultur völlig abgestorben ist, das heißt weniger als ein Pilz vorhanden ist. ☐

7.5 Skizzieren Sie den Graphen von N unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse in ein Koordinatensystem. ☐
(Maßstab: 1 cm $\hat{=}$ 0,5 h; 1 cm $\hat{=}$ 1000 Pilze)

8.0 Für das durchschnittliche Körpergewicht M (in Kilogramm) der Individuen einer bestimmten Säugetierart im Alter t (in Jahren) wird das folgende mathematische Modell zugrunde gelegt: $M(t) = 4(t-8)e^{-bt} + c$ mit $b, c \in \mathbb{R}^+$ und $t \geq 0$.
Bei Berechnungen kann auf Einheiten verzichtet werden, Ergebnisse sind gegebenenfalls auf eine Nachkommastelle zu runden. (Abitur 2004 AI)

8.1 Ermitteln Sie die Werte der reellen Parameter b und c für den Fall, dass die Tiere im Alter von 13,0 Jahren ihr Maximalgewicht von 36,5 kg erreichen. ☒

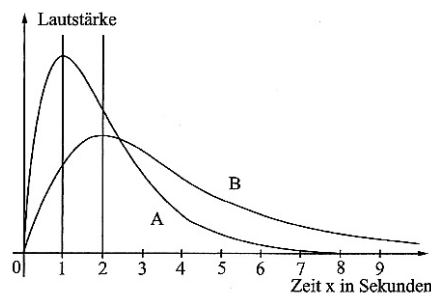
8.2.0 Für die folgenden Teilaufgaben soll gelten: $M(t) = 4(t-8)e^{-0,2t} + 35,0$.

8.2.1 Berechnen Sie das durchschnittliche Geburtsgewicht dieser Säugetiere. ☐

8.2.2 Ermitteln Sie das Alter, in dem die größte Gewichtsabnahme zu erwarten ist. ☒

8.2.3 Bestimmen Sie den Grenzwert der Funktion M für $t \rightarrow \infty$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sinne der vorliegenden Thematik. ☒

9.0 In der Fernsehsendung „Wetten, dass ...?“ wird die Lautstärke des Applauses des Saalpublikums als Maß für die Beliebtheit der Saalwetten gewertet. Der Verlauf zweier „Applauskurven“ für die Wetten A und B ist in der untenstehenden Graphik wiedergegeben. (Abitur 2004 AII)



9.1 Vergleichen Sie den Verlauf der beiden Kurven im Sinne der vorliegenden Thematik. ☐

9.2 Eine der beiden Kurven entspricht dem Graphen der Funktion $g(x) = 5xe^{-x+1}$ für $x \geq 0$. Bestimmen Sie die Extremstelle von g und entscheiden Sie damit, welche der beiden Kurven (A oder B) der Graph von g ist. ☐

9.3 Die andere Kurve wird für $x \geq 0$ durch den Graphen einer der Funktionen

$$h_a(x) = \frac{384x}{(x^2 + a)^2} \text{ mit } a \in \mathbb{R}^+ \text{ beschrieben.}$$

Bestimmen Sie den Wert von a mithilfe der Zeichnung. ☒
(Ergebnis: $a = 12$)

9.4 Die Beliebtheit der Saalwetten kann durch den Wert des Integrals

$\int_0^{10} g(x) dx$ bzw. $\int_0^{10} h_{12}(x) dx$ ausgedrückt werden, wobei ein größerer Wert größere

Beliebtheit anzeigt. $H(x) = \frac{-192}{x^2 + 12}$ ist für $x \geq 0$ eine Stammfunktion von h_{12} .

(Nachweis nicht erforderlich)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Funktionen für $x \geq 0$ eine Stammfunktion von g ist und begründen Sie Ihre Aussage.

$$G_1(x) = -5(x+1)e^{-x}$$

$$G_2(x) = -5(x+1)e^{-x+1}$$

$$G_3(x) = -5xe^{-x+1}$$

Vergleichen Sie nun die Beliebtheit der Wetten anhand der jeweiligen Integralwerte. ○

10.0 Bei der Herstellung von Keramiken werden Kammerbrennöfen verwendet. Die Brenntemperatur $B(t)$ in °C eines Kammerbrennofens in Abhängigkeit von der Zeit t ($0 \leq t \leq 13$) in Stunden (h) kann durch folgende abschnittsweise definierte Funktion dargestellt werden:

$$B(t) = \begin{cases} \frac{180t}{7} + 1170 & \text{für } 0 \leq t < 3 \\ -630 \cdot e^{-\frac{2}{7}t + \frac{6}{7}} + 1170 & \text{für } 3 \leq t \leq 13 \end{cases}$$

wobei von Benennungen abgesehen wird. (Abitur 2006 AI) ●

10.1 Zeigen Sie, dass die Funktion B an der Stelle $t_0 = 3$ differenzierbar ist.

10.2 Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion B .

10.3 Der Kammerbrennofen erreicht 13 Stunden nach dem Beginn des Aufheizens seine maximale Brenntemperatur $B_{\max}$. Zum Zeitpunkt t_1 liegt die Temperatur im Ofen 10% unter $B_{\max}$. Berechnen Sie $B_{\max}$ und den auf Stunden gerundeten Zeitpunkt t_1 .

10.4 Berechnen Sie den Wert $m = \frac{B(13) - B(8)}{13 - 8}$, geben Sie eine sinnvolle Einheit für m an, und interpretieren Sie m im gegebenen Zusammenhang.

10.5 Zeichnen Sie unter Verwendung bisheriger Ergebnisse den Graphen der Funktion B . Maßstab: Abszissenachse: $1 \text{ cm} \hat{=} 1 \text{ h}$; Ordinatenachse: $1 \text{ cm} \hat{=} 100 \text{ °C}$

10.6 Die Maßzahl W des Flächeninhalts der Fläche zwischen den Graphen von B und der t -Achse lässt einen Rückschluss auf die aufgenommene Wärmemenge (Energie) für das Aufheizen des Brennofens bis zur Maximaltemperatur zu. Berechnen Sie die Maßzahl W .

- 11.0 Auf einer Südseeinsel strandete Anfang Januar des Jahres 1955 ein Boot, wobei unter anderem auch Kaninchen an Bord waren. 32 Kaninchen überlebten und verwilderten auf der Insel. Für die Anzahl der Kaninchen in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren gilt

näherungsweise die Funktion $K(t) = \frac{900}{1 + e^{-c(t-15)}}$ mit $t \geq 0$ und $c \in \mathbb{R}$.

Die Zeit t wird ab dem 1.1.1955 gemessen. Im Funktionsterm und bei Berechnungen wird auf Benennungen verzichtet. (Abitur 2006 All)

- 11.1 Bestimmen Sie den Wert von c . ☐
(Ergebnis: $c \approx 0,22$)

- 11.2 Ermitteln Sie die Gleichung der Asymptote des Graphen von K und untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion K . Interpretieren Sie die Ergebnisse im Hinblick auf die Entwicklung der Kaninchenpopulation. ☒

(Teilergebnis: $K(t) = \frac{198e^{-0,22(t-15)}}{(1 + e^{-0,22(t-15)})^2}$)

- 11.3 Berechnen Sie $K(11)$ und interpretieren Sie diesen Wert. ☐

- 11.4 Der Graph von K verläuft punktsymmetrisch zu seinem einzigen Wendepunkt.

Berechnen Sie $K(13)$, $K(15)$ und $K(17)$ und bestimmen Sie daraus die Koordinaten des Wendepunktes. Erläutern Sie die Bedeutung des Wendepunktes für die Entwicklung der Kaninchenpopulation. ☒

- 11.5 Zeichnen Sie den Graphen von K und die Asymptote für $t \in [0;35]$. Berechnen Sie dazu $K(t)$ für vier weitere sinnvolle Zeitpunkte. ☐
(Maßstab: t -Achse: $1 \text{ cm} \hat{=} 5 \text{ Jahre}$; K -Achse: $1 \text{ cm} \hat{=} 100 \text{ Kaninchen}$)

12.0 Eine bayerische Gemeinde gab 2006 im Vorfeld der Fortschreibung des Flächen-nutzungsplanes auf die kommenden Jahre eine Prognose für die Entwicklung der Einwohnerzahl in Auftrag. Das beauftragte Institut sollte aus folgendem Datensatz als mathematisches Modell eine reelle Funktion $N(t)$ aufstellen, die die Einwohnerzahl N in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren seit 1995 annähernd beschreibt und deren Werte für die weitere Entwicklung der Einwohnerzahl ab 2005 zugrunde gelegt werden sollen.

Für den 1.1.1995 wird $t = 0$ gesetzt. Auf die Mitführung von Einheiten kann im Folgenden verzichtet werden. (Abitur 2009 AI)

Jahr (Stand am 1.1.)	1995	...	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Einwohnerzahl	14416	...	15446	15631	15805	15966	16127	16286

12.1 Um einen geeigneten Ansatz zu finden, sind folgende Fragen zu beantworten. Die Antworten sind kurz zu begründen. Gehen Sie dabei davon aus, dass die Näherungsfunktion zu jedem Zeitpunkt die Eigenschaft hat, die sich aus den Werten der Tabelle ergeben.

- A) Sollte die 1. Ableitung der Näherungsfunktion stets positiv oder negativ sein ?
 B) Sollte der Graph der Näherungsfunktion stets rechts- oder linksgekrümmt sein ?
 C) Hat die gesuchte Funktionsgleichung die Form $y = mx + b$? ☒

12.2 Die Erkenntnisse von 12.1 legen nahe, den Ansatz für eine beschränkte Wachstumsfunktion der Form $N(t) = C - a \cdot e^{-kt}$ mit $C, a, k \in \mathbb{R}^+$ zu wählen. Bestimmen Sie aus den Einwohnerzahlen der Jahre 2000 und 2005 die Werte für a und k , wenn gilt: $C = 20000$. ☒

(Ergebnis: $N(t) = 20000 - 5584 \cdot e^{-0,04078t}$)

12.3 Überprüfen Sie, ob das Modell die Einwohnerzahl von 2003 richtig angibt und prognostizieren Sie mithilfe des Modells die Einwohnerzahl für 2030. ☐

12.4 Beschreiben Sie die Bedeutung des Wertes von C im Sachzusammenhang. ☐

12.5 Berechnen Sie den Wert der 1. Ableitung $\frac{dN}{dt} = \dot{N}(t)$ an der Stelle $t = 14$ und interpretieren Sie dessen Bedeutung. ☐

12.6 Die Kanalisation der Gemeinde ist für ca. 19000 Einwohner ausgelegt. Berechnen Sie, wann gemäß dem Modell mit einer Überschreitung dieser Einwohnerzahl zu rechnen ist. ☐

13.0 Seit 1970 wird der weltweite Ausstoß eines bestimmten Schadstoffes gemessen, der im Verdacht steht, gesundheitsgefährdend zu sein. Eine Besorgnis erregende Zunahme des Schadstoffes hat zu vielfältigen wissenschaftlichen Untersuchungen der Thematik geführt. Die jährliche Emission dieses Schadstoffes betrug 1970 in den heutigen EU-Ländern 398 Mengeneinheiten (ME) und 1986 562 ME. Ein erstes Modell beschreibt für den Zeitpunkt t die EU-weite Emissionsrate des Schadstoffes in ME für den Zeitraum eines Jahres vor dem Zeitpunkt t durch die Funktion s_1 mit $s_1(t) = c \cdot e^{kt}$ ($c, k \in \mathbb{R}^+$). $t = 0$ steht für den Beginn des Jahres 1971. Auf die Mitführung von Einheiten kann im Folgenden verzichtet werden. (Abitur 2009 All)

13.1 Berechnen Sie aus den obigen Messwerten die Werte für c und k . ☐

(Ergebnis: $c = 398$ [ME] und $k = 0,0216 \left[\frac{1}{a}\right]$)

13.2 Bestimmen Sie das Jahr, in welchem sich nach diesem Modell die Emission des Schadstoffes in der EU gegenüber 1970 um 50 % erhöht hätte. ☐

13.3 Berechnen Sie das Integral $\int_0^{21} s_1(t) dt$ und erläutern Sie die Bedeutung des Wertes im Sinne der Thematik. ☒

13.4.0 In den Jahren 1987 bis 1991 wurden in der EU neue gesetzliche Regelungen erarbeitet, da der Schadstoff als krebserregend erkannt wurde. Diese Regelungen wurden ab 1.1.1992 wirksam und sollten zu einer Entschärfung der Situation führen. Nach einem zweiten Modell sollte die künftige jährliche Emission des Schadstoffes in der EU nach der Funktion $s_2(t) = 1200 - 941 \cdot e^{-0,0235t}$ (in ME) verlaufen. ☒

$$\text{Nun ist } s(t) = \begin{cases} s_1(t) & \text{für } t \leq 21 \\ s_2(t) & \text{für } t > 21 \end{cases}$$

13.4.1 Zeigen Sie, dass die aus s_1 und s_2 auf diese Weise neu entstandene abschnittsweise definierte Funktion s – im Rahmen der hier möglichen Genauigkeit – an der „Nahtstelle“ $t_0 = 21$ stetig ist.

13.4.2 Zeigen Sie, dass trotz der neuen gesetzlichen Regelungen die Emission des Schadstoffes in der EU weiter zunimmt, die jährliche Zunahme jedoch geringer wird.

13.4.3 Untersuchen Sie das Verhalten von $s(t)$ für die ferne Zukunft und interpretieren Sie das Verhalten im Sachzusammenhang.
Im Jahr 2007 betrug die reale Jahresemission des Schadstoffes in der EU 753 ME. Vergleichen Sie diesen Wert mit dem durch die Funktion s vorhergesagten Wert und kommentieren Sie den Unterschied der Werte.

- 14.0 Durch starke Überfischung war der Fischbestand des Gelbflossenthuns im Südostatlantik stark gefährdet, worauf Verhandlungen über Schutzmaßnahmen aufgenommen wurden. Auf Basis von Messungen der Fischpopulation wurde das folgende mathematische Modell entwickelt. Für den Bestand B (in Millionen Fischen) zum Zeitpunkt t (in Jahren) gilt:

$$B(t) = (at + b)e^{-0,15t} + 70 \text{ mit } t \geq 0 \text{ und } a, b \in \mathbb{R}.$$

Die Zeit wurde auf den 1.1.1995 bezogen. Auf Einheiten wird bei der Rechnung verzichtet. Ergebnisse sind gegebenenfalls auf zwei Nachkommastellen zu runden. (Abitur 2011 AI)

- 14.1 Berechnen Sie die Werte für a und b , wenn am 1.1.2002 der Bestand den minimalen Wert von 35 Millionen Fischen erreicht hat. ☒ (Ergebnis: $a = -15$, $b = 5$)

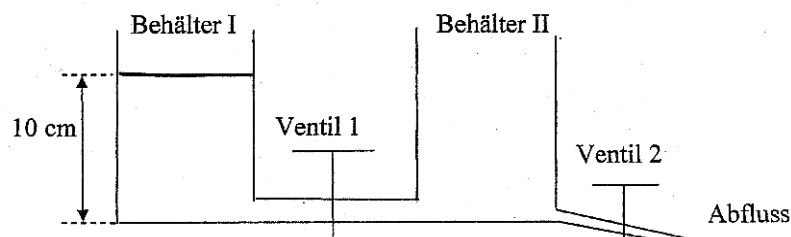
- 14.2 Berechnen Sie den Bestand des Gelbflossenthuns am 1.1.1995, bestimmen Sie den Grenzwert der Funktion B für $t \rightarrow \infty$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sinne der vorliegenden Thematik. ☐

- 14.3 Berechnen Sie den Bestand am 01.07.2011 und die momentane jährliche Zunahme, die das Modell zu diesem Zeitpunkt liefert. ☐

(Teilergebnis: $B(t) = 2,25(t - 7)e^{-0,15t}$)

- 14.4 Zeigen Sie, dass es nach diesem Modell einen Zeitpunkt größter Bestandszunahme gab und berechnen Sie, in welchem Jahr dies der Fall war. ☒

- 15.0 Gegeben sind zwei gleichartige Behälter, welche über ein Rohr miteinander verbunden sind. Am Anfang sind beide Ventile geschlossen und Behälter I hat einen Wasserstand von 10 cm, Behälter II enthält kein Wasser. Beim ersten Experiment wird zum Zeitpunkt $t = 0$ nur das Ventil 1 geöffnet. Der Wasserstand in Behälter II verhält sich entsprechend folgender Funktion: $A_1(t) = 5 \cdot (1 - e^{-kt})$ mit $t \geq 0$, wobei $A_1(t)$ der Wasserstand (in cm) zum Zeitpunkt t ist. Die Zeit t wird in Sekunden gemessen. Bei den Rechnungen kann auf Einheiten verzichtet werden. Runden Sie alle Werte auf eine Nachkommastelle. (Abitur 2011 AII).



- 15.1 Zum Zeitpunkt $t = 8,0$ s beträgt der Wasserstand in Behälter II 4,0 cm. Bestimmen Sie daraus den Wert von k . ☐ (Ergebnis: $k = 0,2$)

15.2 Berechnen Sie die Zeit, nach der in Behälter II der Wasserstand auf 2,0 cm angestiegen war. ○

15.3.0 Das Experiment wird noch einmal wiederholt, wobei jetzt auch der Abfluss hinter Behälter II (Ventil 2) geöffnet ist, durch den gleichmäßig eine bestimmte Menge Wasser abfließt. Die Funktion für den Wasserstand in Behälter II verändert sich nun wie folgt: $A_2(t) = 5 - 5 \cdot e^{-0,2t} - 0,1t$ mit $0 \leq t \leq t_{\text{leer}}$.

15.3.1 Ermitteln Sie, welcher Wasserstand in Behälter II maximal erreicht wird. ⊗

15.3.2 In der Praxis lässt sich die Funktion $A_2(t)$ für $t > 30$ durch ihre schiefe Asymptote ersetzen. Geben Sie die Gleichung der schiefen Asymptote an und berechnen Sie damit näherungsweise den Zeitpunkt t_{leer} , zu dem der Behälter II wieder leer ist. ⊗

16.0 Bei der Weinerzeugung kann man während des Gärprozesses den aktuellen

Alkoholgehalt des Mostes näherungsweise mit der Funktion $A(t) = \frac{100}{8 + b \cdot e^{ct}}$

berechnen, t ist dabei die Dauer des Gärprozesses in Tagen mit $t \geq 0$, b und c sind reelle konstanten mit $b > 0$ und $c < 0$. $A(t)$ gibt den Alkoholgehalt in Volumenprozent an. Je nach den Gegebenheiten im Gärkeller variieren b und c . Bei der Rechnung kann auf die Mitführung von Einheiten verzichtet werden. Runden Sie die Ergebnisse sinnvoll. (Abitur 2012 AI)

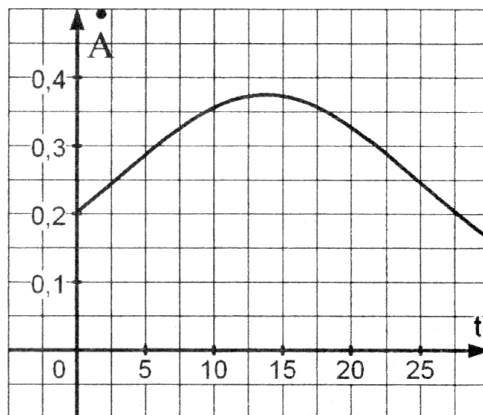
16.1 Der Traubenmost des Winzers Müller hat bereits zu Beginn des Gärprozesses im Keller einen Alkoholgehalt von 2,00 %. Nach 20 Tagen beträgt der Alkoholgehalt genau 8,46 %. Bestimmen Sie damit die Werte von b und c . ○
(Ergebnis: $b = 42$, $c = -0,12$)

16.2 Nach 40 Tagen wird der Gärvorgang abgebrochen. Berechnen Sie den Alkoholgehalt. Berechnen Sie den Alkoholgehalt des dann fertigen Weins. Ermitteln Sie den Alkoholgehalt, der sich nach sehr langer Zeit einstellen würde. ○

16.3 Im Herbst wird der junge Wein („Federweißer“) ausgeschenkt, dessen Alkoholgehalt höchstens 10 % beträgt. Berechnen Sie, bis zu welchem Tag nach Beginn des Gärprozesses der Federweiße ausgeschenkt werden kann. ⊗

16.4 Bestimmen Sie die Ableitung $\frac{dA}{dt} = \dot{A}(t)$ und zeigen Sie, dass der Alkoholgehalt des Weins ständig zunimmt. ⊗

- 16.5 Der Graph der Ableitung $\dot{A}$ ist untenstehend abgebildet. Machen Sie mit Hilfe des Graphen möglichst genaue und begründete Aussagen über die Entwicklung des Alkoholgehalts des Weins. Entnehmen Sie aus der Zeichnung die Koordinaten des Hochpunktes von $\dot{A}$ und interpretieren Sie diese im Sachzusammenhang. 



- 17.0 Ein großer Elektronik-Konzern hat in einer Untersuchung die Wartezeiten auf eine freie Telefonleitung bei seinem Callcenter erfasst. Die Funktion W_k gibt dabei die Wahrscheinlichkeit an, mit der höchstens t Minuten (min) auf eine freie Telefonleitung gewartet werden muss.

Es gilt: $W_k(t) = 1 - e^{-kt}$ mit $t \in \mathbb{R}^+$ und $k \in \mathbb{R}^+$. Der Wert von k ist von der Tageszeit abhängig. Bei der Rechnung kann auf Einheiten verzichtet werden. (Abitur 2012 All)

- 17.1 Berechnen Sie für $k_1 = \frac{1}{60 \text{ min}}$, $k_2 = \frac{1}{12 \text{ min}}$ und $k_3 = \frac{1}{6 \text{ min}}$ die Wahrscheinlichkeit in Prozent, höchstens 5 Minuten auf eine freie Leitung warten zu müssen, und folgern Sie hieraus die Bedeutung des Parameters k für die Wartezeit. 

- 17.2 Bestimmen Sie den Wert k in der Einheit $\frac{1}{\text{min}}$, für den die Wahrscheinlichkeit 95 % beträgt, dass ein Anrufer nach höchstens 10 Minuten auf eine freie Leitung durchgestellt wird. 

- 17.3 Berechnen Sie die Grenzwerte $\lim_{t \rightarrow \infty} W_k(t)$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} (1 - e^{-kt})$ und beschreiben Sie möglichst einfach deren Bedeutung. 

- 17.4 Sei nun $k = 0,1 \frac{1}{\text{min}}$. Die durchschnittliche Wartezeit $\bar{T}$ berechnet sich als

$$\bar{T} = \int_0^{\infty} t \cdot \dot{W}_{0,1}(t) dt. \text{ Zeigen Sie, dass } G(t) = -e^{-0,1t} \cdot (t+10) \text{ eine Stammfunktion von}$$

$t \cdot \dot{W}_{0,1}(t)$ ist. Berechnen Sie $\bar{T}$ und die Wahrscheinlichkeit, höchstens $\bar{T}$ Minuten

auf eine freie Leitung warten zu müssen. 

- 18.0 Eine Gemeinde plant den Umbau einer Kreuzung, an der es unter der Woche am Morgen häufig zu Stauungen kommt. Aus diesem Grund wird das Verkehrsaufkommen untersucht und mathematisch modelliert. Für die Verkehrsdichte (Anzahl der Fahrzeuge pro Minute) an der Kreuzung ergibt sich näherungsweise eine Funktion der Form

$$z: t \mapsto 0,25 \cdot t^2 \cdot e^{-at} + 5 \text{ mit } 0 \leq t \leq 90 \text{ und } a > 0.$$

t ist die seit 7:00 Uhr vergangene Zeit in Minuten.

Bei der Rechnung kann auf die Verwendung von Einheiten verzichtet werden.

(Abitur 2013 AI)

- 18.1 Um 7:13 Uhr beträgt die Verkehrsdichte 27 Fahrzeuge pro Minute. Bestimmen Sie damit den Wert des Parameters a . 

(Ergebnis: $a = 0,05 \frac{1}{\text{min}}$)

- 18.2 Berechnen Sie die Verkehrsdichte um 7:00 Uhr und um 8:30 Uhr. 

- 18.3 Ermitteln Sie den Zeitpunkt, an dem die Verkehrsdichte am größten ist und berechnen Sie die größte Verkehrsdichte. 

(Zur Kontrolle: $\frac{dz(t)}{dt} = z'(t) = (0,5t - 0,0125t^2) \cdot e^{-0,05t}$)

- 18.4 Zeichnen Sie die Kurve für die Verkehrsdichte in ein Koordinatensystem. 

(Maßstab: $1\text{cm} \hat{=} 10\text{min}$; $1\text{cm} \hat{=} 10 \frac{1}{\text{min}}$)

- 18.5 Zeigen Sie, dass die Funktion Z mit

$$Z(t) = -0,25e^{-0,05t} \cdot (20t^2 + 800t + 16000) + 5t \text{ mit } 0 \leq t \leq 90 \text{ eine Stammfunktion der}$$

Funktion z ist und berechnen Sie $\int_0^{60} z(t) dt$.

Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang. 

- 19.0 Morgens um 7:00 Uhr wird eine Tasse heißer Tee eingeschenkt. Der Abkühlvorgang des Tees kann durch die Funktionsgleichung $T(t) = 18 + a \cdot e^{-ct}$ (mit $a, c > 0, t \geq 0$) beschrieben werden, wobei $T(t)$ die Temperatur des Tees in Grad Celsius angibt und t die Zeit in Minuten. Der Abkühlvorgang beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$ um 7:00 Uhr. Bei der Rechnung kann auf die Verwendung von Einheiten verzichtet werden. (Abitur 2013 AII)

- 19.1 Nach 2 Minuten hat der Tee eine Temperatur von 74°C und um 7:25 Uhr ist er bereits auf 28°C abgekühlt. Bestimmen Sie aus diesen Angaben der Werte der Konstanten a und c . 

Setzen Sie in den folgenden Teilaufgaben $a = 65$ und $c = 0,075$.

19.2 Ermitteln Sie die Temperatur des Tees um 7:00 Uhr und auf welche Endtemperatur sich der Tee langfristig abkühlen wird. Erläutern Sie die Bedeutung der Endtemperatur im Sachzusammenhang. ○

19.3 Bestimmen Sie die Werte der Ableitung von T nach 3 Minuten und nach 25 Minuten. Erläutern Sie die Werte im Sachzusammenhang. ⓧ

19.4 Der Abkühlvorgang wird als abgeschlossen bezeichnet, wenn die Temperatur des Tees unter 19°C fällt. Berechnen Sie, um wie viel Uhr (gerundet auf ganze Minuten) dies der Fall ist. ○

20.0 Für Ausdauersportler ist die Laktatkonzentration L im Blut (in mmol/l) ein Indikator für die Ausdauerleistungsfähigkeit. Bei Läufern wird auf dem Laufband die Laktatkonzentration in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v des Läufers (in km/h) gemessen. Die Messwerte von Läufer Max bei einem Laktattest lassen vermuten, dass die Werte nach einer Funktion der Form $L(v) = (0,02v - 0,25) \cdot e^{av} + b$ für $0 \leq v \leq 19$ verlaufen. Bei den Rechnungen kann auf Benennungen verzichtet werden. Die Ergebnisse sind gegebenenfalls auf zwei Nachkommastellen zu runden. (Abitur 2014 AI)

20.1 Berechnen Sie die Werte für a und b , wenn die Laktatkonzentration bei Max in Ruhe $0,95 \text{ mmol/l}$ und bei einer Geschwindigkeit von 7 km/h $0,65 \text{ mmol/l}$ beträgt. ○
(Ergebnis: $a \approx 0,23$; $b = 1,20$)

20.2 Untersuchen Sie mithilfe der 1. Ableitung von L den Verlauf der Laktatkonzentration im Blut von Max und interpretieren Sie die Koordinaten des Extrempunktes im Sachzusammenhang. ⓧ
(Teilergebnis: $L'(v) = (0,0046v - 0,0375) \cdot e^{0,23v}$)

20.3 Zeichnen Sie die Laktatkurve für $0 \leq v \leq 19$ in ein Koordinatensystem. ○
(Maßstab: $1 \text{ cm} = 2 \text{ km/h}$; $1 \text{ cm} = 1 \text{ mmol/l}$)

20.4 Der Laktattest dient dazu, die persönliche anaerobe Schwelle des Läufers zu ermitteln. Bei der anaeroben Schwelle reicht der aufgenommene Sauerstoff gerade noch aus, um den Energiebedarf in der Muskulatur zu decken. Zur Bestimmung der anaeroben Schwelle gibt es unterschiedliche Modelle:
a) Die Steigung der Laktatkurve hat den Wert 1.
b) Die Laktatkonzentration im Blut beträgt 4 mmol/l .
Bestimmen Sie die anaerobe Schwelle für Max nach beiden Modellen und vergleichen Sie die Werte. Verwenden Sie dazu für a) als Näherungsfunktion für die Laktatkonzentration $N(v) = e^{0,5v-7} + 1$ und lesen Sie den Wert für b) aus der Zeichnung von 20.3 ab. ○

21.0 Im Jahre 2012 ist die Gasförderung im Feld „Clipper South“ in der südlichen britischen Nordsee angelaufen. Eine Planung für die kommenden Jahre sieht folgende Förderraten $g(t)$ vor:

t	0	5	10	15	20
$g(t)$	108	156	220	300	400

Dabei ist t die Zeit in Jahren seit Förderbeginn und $g(t)$ die Förderrate in Millionen m^3 pro Jahr. Bis zum vollständigen Abbau des Erdgasfeldes soll sich die Förderrate modellhaft durch die Funktion g mit $g(t) = (a - 2,7 \cdot t) \cdot e^{bt}$, $a, b \in \mathbb{R}$ beschreiben lassen. Bei den Rechnungen kann auf die Verwendung von Einheiten verzichtet werden. Runden Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll. (Abitur 2015 AI)

21.1 Bestimmen Sie die Parameter a und b mit Hilfe der Planungsdaten für $t = 0$ und $t = 10$ und interpretieren Sie den Wert von a im Sachzusammenhang. ☐
(Teilergebnis: $a = 108$; $b = 0,1$)

21.2 Ermitteln Sie das Jahr, in dem die Förderrate nach dem Modell auf den Wert 0 abgesunken und damit das Feld vollständig abgebaut sein wird. ☐

21.3 Berechnen Sie, in welchem Jahr die Förderrate am größten sein wird und geben Sie diese an. ☐

(Teilergebnis: $g(t) = (8,1 - 0,27t) \cdot e^{0,1t}$)

21.4 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion g in ein geeignetes Koordinatensystem. ☐

21.5 Zeigen Sie, dass die Funktion G mit $G(t) = (1350 - 27t) \cdot e^{0,1t}$ eine Stammfunktion von g ist und berechnen Sie das Integral $\int_0^{40} g(t) dt$. Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang. ☐

22.0 Bei einer Infusion wird einem Patienten pro Minute eine konstante Menge eines Medikamentes zugeführt. Das im Blut angereicherte Medikament wird über die Nieren wieder ausgeschieden. Der Anteil der im Blut vorhandenen Medikamentenmenge, der pro Minute abgebaut wird, wird als Ausscheidungsrate a bezeichnet. Für die im Blut des Patienten befindliche Menge m des Medikaments in mg (Milligramm) zum Zeitpunkt t (in Minuten) nach Beginn der Infusion ergibt sich eine Funktion der Form:

$$m(t) = 100(1 - e^{-at}), \quad t \geq 0 \text{ und } a > 0.$$

Bei Berechnungen kann auf die Verwendung von Einheiten verzichtet werden. Runden Sie bei der Zeit immer auf Minuten, bei der Menge auf zwei Nachkommastellen.
(Abitur 2015 All)

22.1 Eine Minute nach Beginn der Infusion befinden sich bereits 4,88 mg des Medikaments im Blut des Patienten. Weisen Sie nach, dass für die Ausscheidungsrate $a = 0,05 \left(\frac{1}{\text{min}} \right)$

gilt. ☐

22.2 Berechnen Sie, welche Menge des Medikaments sich 10 Minuten nach Anlegen der Infusion im Blut befindet und wann die therapeutische Minimalmenge von 70 mg erreicht wird.

Bestimmen Sie die Menge, die bei dauerhafter Infusionstherapie langfristig im Körper des Patienten vorhanden ist. ☐

22.3 Weisen Sie nach, dass für die erste Ableitung von m gilt:

$\dot{m}(t) = 5e^{-0,05t}$. Berechnen Sie die Werte $\dot{m}(10)$ und $\dot{m}(30)$ und interpretieren Sie Ihre Ergebnisse im Sachzusammenhang. ☐

22.4.0 Die dem Patienten während der gesamten Infusion zugeführte Medikamentenmenge pro Minute ist von Anfang an konstant.

22.4.1 Ermitteln Sie die pro Minute zugeführte Medikamentenmenge. ☒

22.4.2 In einer Infusionsflasche befinden sich 1000 mg. Die Infusion wird um 8.00 Uhr erstmals beim Patienten angelegt. Damit werden dem Patienten ab diesem Zeitpunkt konstant 5 mg pro Minute zugeführt. Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Flasche leer ist.

Ab diesem Zeitpunkt wird das Medikament gemäß der Funktion $r(t) = 100e^{-0,05t}$ mit $t \geq 0$ abgebaut, wobei $r(t)$ die zur Zeit t vorhandene Restmenge angibt. Begründen Sie, warum diese Funktion den Sachverhalt sinnvoll wiedergibt und bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Pflegekraft die Infusionsflasche ersetzen muss, bevor die therapeutische Minimalmenge von 70 mg im Blut des Patienten unterschritten wird. ☒

23.0 In einem abgeschiedenen Dorf verbreitet der Bewohner Maxl zum Zeitpunkt $t = 0$ das Gerücht, dass der berühmte Sänger Fritzi Vordergucker seinen Urlaub hier im Ort verbringen möchte.

Die Funktion B beschreibt näherungsweise die Anzahl der Dorfbewohner, die nach t Tagen von dem Gerücht gehört haben und ist durch die Funktionsgleichung

$$B(t) = \frac{A}{1 + 849 \cdot e^{ct}} \text{ mit } t \geq 0 \text{ und } A, c \in \mathbb{R} \text{ festgelegt.}$$

Bei den Rechnungen kann auf die Verwendung von Einheiten verzichtet werden.
Runden Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll. (Abitur 2016 AI)

23.1 Ermitteln Sie die Parameter A und c , wenn nach 5 Tagen bereits 120 Dorfbewohner von dem Gerücht erfahren haben und am Anfang nur Maxl Bescheid wusste. ☐
(Ergebnis: $A = 850$; $c = -0,988$)

23.2 Berechnen Sie, nach wie vielen Tagen bereits 500 Bewohner von dem Gerücht gehört haben. ☐

23.3 Bestimmen Sie $\lim_{t \rightarrow \infty} B(t)$ und erklären Sie die Bedeutung dieses Grenzwertes im Sachzusammenhang. ☐

23.4 Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion B .

Bestimmen Sie ferner das Verhalten der 1. Ableitungsfunktion von B für $t \rightarrow +\infty$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang. ☒

(Teilergebnis: $B'(t) = \frac{712990,2 \cdot e^{-0,988t}}{(1 + 849 \cdot e^{-0,988t})^2}$)

23.5 Zeichnen Sie für $t \in [0; 16]$ den Graphen von B in ein geeignetes Koordinatensystem. ☐

24.0 Zur Wiederaufforstung von steilen Gebirgshängen werden zunächst Baumsetzlinge gezüchtet und anschließend gepflanzt. Die Höhe h (in cm) eines Baumsetzlings in Abhängigkeit der Zeit t (in Monaten) wird durch folgende Funktion h näherungsweise beschrieben: $h: t \mapsto 70 + 30 \cdot \ln(3t + 2)$ für $t \in [0; 240]$

Die Pflanzung des Setzlings erfolgt zum Zeitpunkt $t = 0$. Nach 240 Monaten ist das Höhenwachstum im Wesentlichen beendet. Auf die Verwendung von Einheiten kann bei der Rechnung verzichtet werden. Ergebnisse sind sinnvoll zu runden.
(Abitur 2016 AI)

24.1 Berechnen Sie die Höhe eines Setzlings zum Zeitpunkt der Anpflanzung und am Ende der Wachstumsphase. ☐

24.2 Haben die Bäume eine Höhe von mindestens 250 cm erreicht, sind sie sicher mit dem Gebirgshang verwurzelt und können so einen Murenabgang nach sehr starken Regenfällen verhindern.

Berechnen Sie, wie viele Jahre es ab dem Beginn der Pflanzung dauert, bis ein Murenabgang auf Grund der Aufforstung erfolgreich abgewendet werden kann. ☐

24.3 Zeigen Sie, dass die Baumsetzlinge für $t = 0$ am stärksten wachsen. ☒

(Teilergebnis: $\dot{h}(t) = \frac{90}{3t+2}$)

25.0 Computerviren sind Programme, die sich über das Internet rasch verbreiten und von ihnen infizierte Rechner schädigen oder zerstören. Wird ein neuer Virus in Umlauf gebracht, verbreitet er sich zunächst rasch. Die Infizierungsrate I beschreibt die Anzahl der Computer, die sich pro Tag neu infizieren und kann näherungsweise durch den Funktionsterm $I(t) = 1000 \cdot t^2 \cdot e^{at}$ mit $t \geq 0; a \in \mathbb{R}$ beschrieben werden.

Die Zeit t wird in Tagen angegeben, wobei $t = 0$ derjenige Zeitpunkt ist, an dem der neue Virus in Umlauf gebracht wird.

Bei Berechnungen kann auf die Verwendung von Einheiten verzichtet werden.

Ergebnisse sind sinnvoll zu runden. (Abitur 2016 All)

25.1 Berechnen Sie den Wert für a auf drei Dezimalstellen gerundet, wenn nach 24 Stunden die Infizierungsrate bei 779 Computern pro Tag liegt. ☐

(Ergebnis: $a = -0,250$)

25.2 Bestimmen Sie den Grenzwert von I für $t \rightarrow \infty$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang. ☐

25.3 Bestimmen Sie die Zeitintervalle, in denen die Infizierungsrate zunimmt bzw. abnimmt und ermitteln Sie die maximale Infizierungsrate. ☐

(Teilergebnis: $\dot{I}(t) = 250 \cdot (8t - t^2) \cdot e^{-0,25t}$)

25.4 Zeichnen Sie den Graph von I für die ersten 20 Tage in ein Koordinatensystem.

(Maßstab: t -Achse: $1\text{cm} = 2$ Tage; I -Achse: $1\text{cm} = 1000$ infizierte Computer pro Tag) ☐

25.5 Kennzeichnen Sie die durch das bestimmte Integral $A = \int_4^8 I(t) dt$ beschriebene Fläche

im Koordinatensystem von Teilaufgabe 25.4 und schätzen Sie dessen Wert durch geometrische Betrachtung näherungsweise ab. Achten Sie dabei auf eine klare Darstellung Ihrer Vorgehensweise. Interpretieren Sie die Bedeutung des ermittelten Wertes im Sachzusammenhang. ☒

26.0 Die Funktion n beschreibt näherungsweise die zeitliche Entwicklung der Einwohnerzahl einer fränkischen Kleinstadt. Es gilt hierfür die Funktionsgleichung

$n(t) = b \left(-e^{-0,05t} + e^{-0,25t} + 1,5 \right)$ mit $t \geq 0, b \in \mathbb{R}$.

Der Zeitpunkt $t = 0$ wird auf den 1.1.1995 festgelegt. Dabei gibt n die Einwohnerzahl in Tausend und t die Zeit in Jahren an. Auf Einheiten soll bei den Rechnungen verzichtet werden. Runden Sie die Ergebnisse sinnvoll. (Abitur 2017 AI)

26.1 Am 1.1.1999 hatte die Stadt 20983 Einwohner. Bestimmen Sie damit den Wert des Parameters b . ☐

(Ergebnis: $b \approx 20$)

26.2 Berechnen Sie Art und Koordinaten des lokalen Extrempunktes des Graphen der Funktion n und interpretieren Sie Ihre Ergebnisse im gegebenen Sachzusammenhang. 

(mögliches Teilergebnis: $n(t) = e^{-0,05t} - 5e^{-0,25t}$)

26.3 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion n in ein geeignetes Koordinatensystem. 

26.4 Zum 1.1.2010 konnte die Stadt Fördergelder beantragen. Diese richteten sich nach der durchschnittlichen Einwohnerzahl der Stadt während der vergangenen 15 Jahre. Ermitteln Sie die Höhe der Fördermittel, wenn es pro durchschnittlichem Einwohner 500 € an Fördergeldern gab, indem Sie zunächst das Integral

$$I = \int_0^{15} n(t) dt \text{ berechnen. } $$

(Teilergebnis: $I \approx 317$)

27.0 Die subjektive Empfindung der Tonhöhe Z des menschlichen Gehörs in Abhängigkeit von der Frequenz x in Hertz (Hz) kann durch folgende Gleichung beschrieben werden:

$$Z(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 < x \leq 427 \\ 1127 \cdot \ln\left(1 + \frac{x}{700}\right) - 110 & \text{für } 427 < x \leq 19000 \end{cases}$$

Die Einheit der Tonhöhe Z ist 1 mel. Runden Sie die Ergebnisse auf ganze Zahlen. Auf das Mitführen von Einheiten kann verzichtet werden. (Abitur 2017 AI) 

27.1 Zeigen Sie, dass die Funktion Z an der Nahtstelle $x = 427$ - im Rahmen der Rundungsgenauigkeit - stetig und differenzierbar ist.

27.2 Berechnen Sie die Frequenz x , bei der die Tonhöhe von 1400 mel empfunden wird.

27.3 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion Z im Bereich $0 < x \leq 2200$.

(Maßstab: waagrechte Achse: 1 cm = 200 Hz; senkrechte Achse: 1 cm = 200 mel)

28.0 Zum Ende des Jahres 1995 (Zeitpunkt $t = 0$) lebten laut der Organisation der Vereinten Nationen (UNO) 5,74 Milliarden Menschen auf der Erde. Ende 2016 hatte die Weltbevölkerung gegenüber $t = 0$ um 29,1 % zugenommen. Mit der vereinfachenden Annahme einer exponentiellen Entwicklung gilt für die Gesamtzahl N der Weltbevölkerung in Milliarden in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren die Gleichung $N(t) = a \cdot e^{bt}$ mit $t \geq 0$ und $a, b \in \mathbb{R}$.

Runden Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll. (Abitur 2017 AII)

28.1 Bestimmen Sie aus den obigen Angaben die Parameter a und b . 

(Ergebnisse: $a = 5,74; b \approx 0,01216$)

- 28.2 Berechnen Sie, wie viele Menschen zum Ende des Jahres 2005 nach dem Modell von 28.0 auf der Erde leben.
Vergleichen Sie das Ergebnis mit der tatsächlichen Weltbevölkerung Ende 2005 von 6,52 Milliarden (UNO), indem Sie die prozentuale Abweichung berechnen und bewerten Sie damit die Güte des Modells.
Geben Sie außerdem stichpunktartig drei Gründe an, die eine genaue Ermittlung der weltweiten Bevölkerungszahl erschweren. ○
- 28.3 Ermitteln Sie, um wie viele Menschen die Weltbevölkerung voraussichtlich im Jahr 2017 zunehmen wird. ○
- 28.4 Bestimmen Sie die Gleichung der Ableitungsfunktion $\dot{N}$ und berechnen Sie $\dot{N}(21)$. Interpretieren Sie diesen Wert im Sachzusammenhang und vergleichen Sie ihn mit Ihrem Ergebnis der Teilaufgabe 28.3. ○
- 28.5 Bestimmen Sie das Jahr, in dem sich die Weltbevölkerung gegenüber dem 31.12.1995 nach dem Modell von 28.0 verdoppelt haben wird. ○
- 28.6 Berechnen Sie, welche Bevölkerungszahl sich am Ende des Jahres 2052 ergeben würde, wenn man - in einem anderen Szenario - ab Ende des Jahres 2016 von einer linearen Zunahme um 90 Mio. pro Jahr ausgeht. ⚡
- 29.0 Zur Bekämpfung von Schädlingsfliegen werden auf einer Insel unfruchtbare Fliegen-Männchen ausgesetzt. Im Folgenden wird die gesamte Fliegenpopulation p in Abhängigkeit von der Zeit $t \geq 0$ durch $p(t) = 10 \cdot e^{-0,002t^2 + 0,06t + c}$ mit $c \in \mathbb{R}$ modelliert. Dabei ist $t = 0$ der Zeitpunkt, zu dem die Kiste mit den unfruchtbaren Fliegen-Männchen geöffnet wird. Die Population p wird in Millionen Stück und die Zeit t in Tagen angegeben. Auf das Mitführen von Einheiten kann verzichtet werden. Alle Ergebnisse sind auf zwei Nachkommastellen zu runden. (Abitur 2018 All)
- 29.1 Beim Öffnen der Kiste beträgt die Gesamtpopulation inklusive der ausgesetzten Männchen 6,38 Millionen Fliegen. Berechnen Sie den Wert des Parameters c auf zwei Nachkommastellen gerundet. ○
(Ergebnis: $c = -0,45$)
- 29.2 Zeigen Sie, dass die Population nach einigen Tagen ihren absoluten Höchststand erreicht. Bestimmen Sie diesen Höchststand und den dazugehörigen Zeitpunkt. ⚡
(mögliches Teilergebnis: $\dot{p}(t) = (0,6 - 0,04t) \cdot e^{-0,002t^2 + 0,06t - 0,45}$)
- 29.3 Zum Zeitpunkt $t_w = 30,81$ (Tage) weist die Funktion p eine Wendestelle auf (Nachweis nicht erforderlich). Berechnen Sie die Differenz $p(t_w + 0,5) - p(t_w - 0,5)$ und interpretieren Sie diesen Wert im Sachzusammenhang. ⚡

- 29.4 Zeichnen Sie für $0 \leq t \leq 60$ auch unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse den Graphen von p . Erreicht p den Wert 0,5 Millionen, gelten die Fliegen als ausgerottet. Bestimmen Sie diesen Zeitpunkt näherungsweise aus Ihrer Zeichnung. 
Maßstab auf der t -Achse: 1 cm = 5 Tage
Maßstab auf der p -Achse: 1 cm = 1 Million Fliegen

- 29.5 Die durchschnittliche Population $\bar{p}$ über einen Zeitraum $[t_1; t_2]$ beträgt

$$\bar{p} = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt. \text{ Im Folgenden soll } \bar{p} \text{ über den Zeitraum } [15; 35] \text{ geschätzt werden:}$$

Markieren Sie dazu ein geeignetes Flächenstück in der Zeichnung aus Teilaufgabe 29.4. Schätzen Sie diese Maßzahl A dieses Flächenstücks aus der Zeichnung heraus ab und berechnen Sie damit einen Näherungswert für $\bar{p}$. 

- 30.0 Die folgende Tabelle gibt die Entwicklung der Gesamtlänge aller Autobahnen in der Bundesrepublik Deutschland ab dem Jahresende 1950 bis 1990 an.
(Quelle: Statistisches Bundesamt)

Jahr	1950	1955	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990
Länge	2128	2187	2551	3204	4110	5742	7292	8198	8822

Ausgehend von den Tabellenwerten kann die Gesamtlänge aller Autobahnen ab 1950

modelliert werden durch die reelle Funktion L mit der Gleichung $L(t) = \frac{7500 \cdot a}{a + e^{-kt}} + 2000$,

wobei $t \geq 0$.

Dabei gibt t die Zeit in Jahren ab dem Jahresende 1950 und $L(t)$ die Länge des Autobahnnetzes in Kilometern an.

Bei Berechnungen kann auf die Verwendung von Einheiten verzichtet werden.

Runden Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll. (Abitur 2019 AI)

- 30.1 Bestimmen Sie mithilfe der Werte aus den Jahren 1950 und 1990 die Werte der Parameter a und k . 
(Ergebnisse: $a \approx 0,017$; $k \approx 0,16$)

- 30.2 Das Modell wird als aussagekräftig und realitätsnah eingestuft, wenn die berechneten Werte von den tatsächlichen um weniger als 5 % abweichen. Zur Überprüfung werden in der folgenden Tabelle die beiden Hilfsfunktionen U und O mit $U(t) = 0,95 \cdot L(t)$ und $O(t) = 1,05 \cdot L(t)$ herangezogen.

Jahr	1950	1955	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990
$U(t)$	2019	2160							
Länge	2128	2187	2551	3204	4110	5742	7292	8198	8822
$O(t)$			2712						

Übertragen Sie die Tabelle auf Ihr Bearbeitungsblatt und berechnen Sie die fehlenden Werte.

Beurteilen Sie, ob das Modell die genannten Kriterien erfüllt. ☐

30.3 Bestimmen Sie das Jahr, in dem nach diesem Modell die Gesamtlänge von 7500 km überschritten wurde. ☐

30.4 Berechnen Sie die Wendestelle t_w der Funktion L und geben Sie das zugehörige Jahr an.

Verwenden Sie dazu ohne Nachweis
$$L(t) = \frac{-0,3264e^{-0,16t} \cdot (0,0017 - e^{-0,16t})}{(0,0017 - e^{-0,16t})^3}.$$

Berechnen Sie außerdem $L'(t_w)$ und interpretieren Sie die Ergebnisse im Sachzusammenhang. ☒

30.5 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion L für $0 \leq t \leq 40$ in ein geeignetes Koordinatensystem. ☐

30.6 Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \infty} L(t)$ und interpretieren Sie diesen im

Sachzusammenhang.

Tatsächlich ist die Gesamtlänge aller Autobahnen nach 1990 stärker angewachsen als nach dem Modell zu erwarten gewesen wäre. Nennen Sie einen möglichen Grund hierfür. ☐

31.0 Das Haber-Bosch-Verfahren dient zur Herstellung von Ammoniak, der wesentlicher Ausgangsstoff zur Düngemittelproduktion ist und deshalb eine außerordentliche Bedeutung für die Nahrungsversorgung der Weltbevölkerung besitzt. Die Ammoniakausbeute beim Haber-Bosch-Verfahren ist temperatur- und druckabhängig. Bei einem Druck von 300 bar und einem Temperaturbereich von $200^\circ\text{C} \leq T \leq 700^\circ\text{C}$ besteht eine funktionale Abhängigkeit zwischen der Ammoniakausbeute A in Prozent und der Temperatur T in $^\circ\text{C}$.

Die Funktion A mit der Gleichung $A(T) = \frac{7200}{72 + e^{0,0106T}}$ und der Definitionsmenge

$D_A = [200; 700]$ beschreibt näherungsweise diesen Zusammenhang. Auf die Temperatureinheit $^\circ\text{C}$ und das Prozentzeichen % kann bei den Rechnungen verzichtet werden. Die Temperaturangaben sind auf ganze Zahlen zu runden. (Abitur 2019 All)

31.1 Bestimmen Sie das Monotonieverhalten der Funktion A . ☒

Mögliches Teilergebnis:
$$A'(T) = \frac{-76,32e^{0,0106T}}{(72 + e^{0,0106T})^2}$$

31.2 Die folgende Berechnung der zweiten Ableitung enthält **einen** Fehler. Benennen Sie den Fehler in Worten und geben Sie den Term der zweiten Ableitung richtig an. 

$$A''(T) = \frac{-76,32e^{0,0106T} \cdot 0,0106 \cdot (72 + e^{0,0106T})^2 - (-76,32e^{0,0106T}) \cdot 2 \cdot (72 + e^{0,0106T}) \cdot e^{0,0106T} \cdot 0,0106}{(72 + e^{0,0106T})^2}$$

$$A''(T) = \frac{-76,32e^{0,0106T} \cdot 0,0106 \cdot (72 + e^{0,0106T}) - (-76,32e^{0,0106T}) \cdot 2 \cdot e^{0,0106T} \cdot 0,0106}{72 + e^{0,0106T}}$$

$$A''(T) = \frac{-76,32e^{0,0106T} \cdot 0,0106 \cdot ((72 + e^{0,0106T}) - 2 \cdot e^{0,0106T})}{72 + e^{0,0106T}}$$

$$A''(T) = \frac{-76,32e^{0,0106T} \cdot 0,0106 \cdot (72 - e^{0,0106T})}{72 + e^{0,0106T}}$$

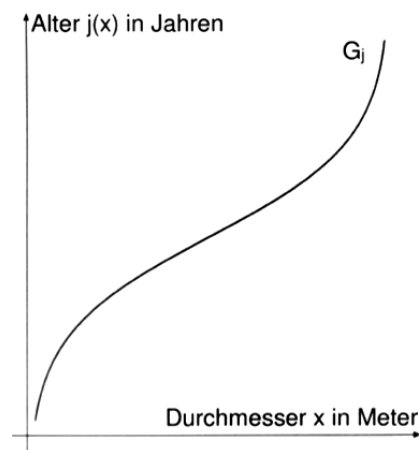
31.3 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion A für den angegebenen Temperaturbereich in ein geeignetes Koordinatensystem
(Maßstab: 1 cm = 50°C auf der Abszisse, 1 cm = 10 % auf der Ordinate).
Lesen Sie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen der Funktion näherungsweise aus der Zeichnung ab und interpretieren Sie diese im Sachzusammenhang. 

32.0 Zwischen dem Alter einer Eiche in Jahren und ihrem Stammdurchmesser x in Metern besteht ein funktionaler Zusammenhang j , der modellhaft durch die Gleichung

$$j(x) = 80 \ln \left(\frac{60x}{3-x} \right) \text{ beschrieben ist. Der Schnitt durch den Stamm der Eiche wird}$$

näherungsweise als Kreis angenommen. Der Durchmesser wird in einer Höhe von 1,30 m über dem Boden gemessen. Untenstehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion j mit der Definitionsmenge $D_j = [0,067; 2,95]$. Der Graph G_j der Funktion j besitzt einen Wendepunkt.

Die Altersangaben sind auf ganze Jahre zu runden. Auf die Mitführung von Einheiten kann verzichtet werden. (Abitur 2019 All)

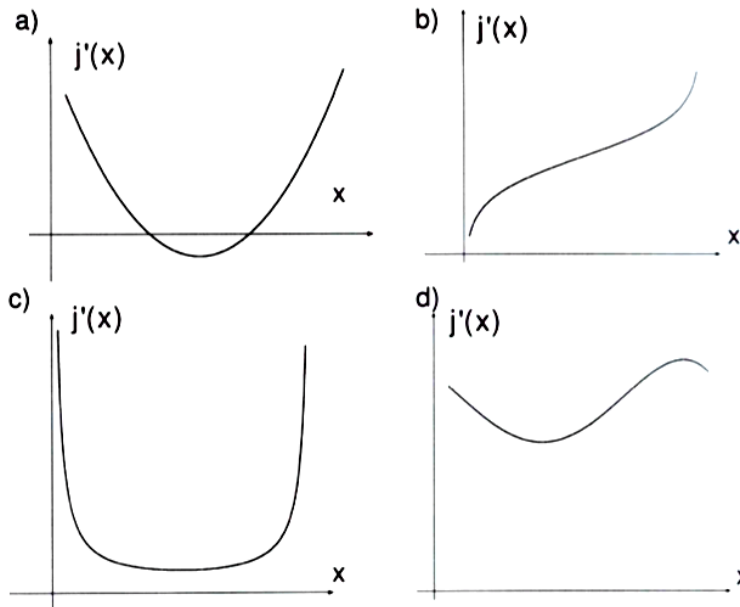


32.1 Bestimmen Sie das Alter einer Eiche, wenn in einer Höhe von 1,30 m der Umfang des Stammes 600 cm beträgt. ○

32.2 Ermitteln Sie die Wertemenge der Funktion j – auch unter Verwendung des Graphen von 32.0 – und interpretieren Sie Ihr Ergebnis im Sachzusammenhang. ⊗

32.3 Eine der folgenden vier Abbildungen zeigt den Graphen der ersten Ableitungsfunktion j' .

Geben Sie den Buchstaben des richtigen Graphen an und stützen Sie Ihre Wahl durch ein bekräftigendes Argument. Begründen Sie für jeden anderen Graphen mit einem stichhaltigen Argument, warum dieser nicht in Frage kommt. 



32.4 Gegeben ist die Gleichung der zweiten Ableitung $j''(x) = \frac{-240(3-2x)}{(3x-x^2)^2}$ der Funktion j

(Nachweis nicht erforderlich!). Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes W von G_j und erläutern Sie die Bedeutung im Sachzusammenhang. 

33.0 Um die Wirksamkeit eines Medikaments zu untersuchen, wird nach dessen Einnahme die Konzentration im Blut der Patienten gemessen. Diese kann näherungsweise durch die Funktion $k: t \mapsto 0,75t \cdot e^{-0,25t+2}$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+$ beschrieben werden. Dabei gibt der Funktionswert von k die Konzentration des Medikaments im Blut des Patienten in Milligramm pro Liter $\left[\frac{\text{mg}}{\text{l}} \right]$ und die Variable t die Zeit in Stunden [h] nach der Einnahme des Medikaments an. Auf das Mitführen von Einheiten kann verzichtet werden. Runden Sie die Ergebnisse sinnvoll. (Abitur 2020 Teil 2 AI)

33.1 Ermitteln Sie, nach wie vielen Stunden nach der Einnahme gemäß der gewählten Modellfunktion die maximale Konzentration des Medikaments im Blut erreicht ist und berechnen Sie diese maximale Konzentration. 

33.2 Berechnen Sie mithilfe partieller Integration den Wert des bestimmten Integrals

$$\frac{1}{20} \int_0^{20} k(t) dt$$

und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang. 

33.3 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion k in ein kartesisches Koordinatensystem im Intervall $0 \leq t \leq 25$. Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 0,5 cm.

Übersteigt die Konzentration des verabreichten Medikaments im Blut des Patienten

$6 \frac{\text{mg}}{\text{l}}$ können Nebenwirkungen auftreten. Ermitteln Sie näherungsweise mit Hilfe des Graphen von k , in welchem Zeitraum nach der Einnahme damit zu rechnen ist. ○

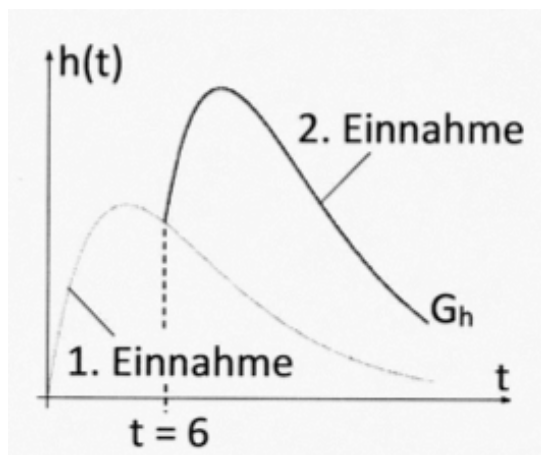
33.4.0 Um die Nebenwirkungen zu vermindern, plant der Hersteller das Medikament geringer zu dosieren. Es soll vier Stunden nach der Einnahme als Höchstwert eine Konzentration von $5 \frac{\text{mg}}{\text{l}}$ im Blut auftreten. Die Konzentration im Blut lässt sich dann mit einer Funktionsgleichung der Art $g(t) = c \cdot t \cdot e^{-0,25t+2}$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+$; $c \in \mathbb{R}$ modellhaft darstellen. Dabei gibt der Funktionswert von g die Konzentration des Medikaments im Blut des Patienten in Milligramm pro Liter $\left[\frac{\text{mg}}{\text{l}} \right]$ und die Variable t die Zeit in Stunden [h] nach der Einnahme an.

33.4.1 Bestimmen Sie den Wert des Parameters c . ⚡

33.4.2 Einem Patienten wird verordnet, sechs Stunden nach der Ersteinnahme das Medikament nochmals einzunehmen. Die Konzentration im Blut entspricht dann modellhaft den Funktionswerten der Funktion h mit

$$h(t) = 0,46t \cdot e^{-0,25t+2} + 0,46(t-6) \cdot e^{-0,25(t-6)+2} \text{ mit } t \in \mathbb{R} \text{ und } t \geq 6.$$

Die Abbildung zeigt den Graphen G_h der Funktion h . Untersuchen Sie, ob der Patient bei dieser Verordnung mit Nebenwirkungen (siehe Teilaufgabe 33.3) zu rechnen hat. ⚡



- 34.0 Forschungsergebnisse betonen die Bedeutung des Wachstums des menschlichen Gehirns für die Entwicklung kognitiver Fähigkeiten. Das durchschnittliche Gehirnvolumen des Menschen nach der Geburt bis zum Ende des sechsten

Lebensjahres kann näherungsweise durch die Funktion $V: t \mapsto \frac{1263}{1+2,5 \cdot e^{-at}}$ mit $t \in [0;6]$

sowie $a \in \mathbb{R}^+$ modelliert werden.

Dabei entspricht $V(t)$ dem Gehirnvolumen in Millilitern (ml) zum Zeitpunkt t in Jahren nach der Geburt. In den Rechnungen kann auf die Mitführung von Einheiten verzichtet werden, in den Antworten sind diese zu berücksichtigen. (Abitur 2020 Teil 2 All)

- 34.1 Am fünften Geburtstag ($t = 5$) beträgt das durchschnittliche Gehirnvolumen des Menschen etwa 1260 ml. Berechnen Sie hiermit den Wert der Konstanten a .

Runden Sie das Ergebnis auf eine Nachkommastelle. ☐
(Ergebnis: $a \approx 1,4$)

- 34.2 In einer Untersuchung kurz nach der Geburt wird bei einem ausgewählten Kind ein Gehirnvolumen von 390 ml festgestellt.

Berechnen Sie das durchschnittliche Volumen des Gehirns bei der Geburt laut dem Modell sowie die prozentuale Abweichung des bei der Untersuchung gemessenen Wertes vom Volumenwert des Modells. ☐

- 34.3 Zeigen Sie, dass für die Volumenwachstumsgeschwindigkeit nach dem Modell gilt:

$$\dot{V}(t) = \frac{4420,5 \cdot e^{-1,4t}}{(1+2,5 \cdot e^{-1,4t})^2}$$

Begründen Sie mathematisch, dass das Gehirnvolumen echt monoton zunimmt und berechnen Sie das durchschnittliche Gehirnvolumen nach dem Modell am Ende des 6. Lebensjahres. ☒

- 34.4 Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion V für $0 \leq t \leq 6$ in ein kartesisches Koordinatensystem. ☐

- 34.5 Das menschliche Gehirn ist in der Regel im Alter von 10 Jahren ausgewachsen und besitzt dann ein durchschnittliches Volumen von 1400 ml.

Untersuchen Sie, ob die gewählte Modellfunktion das Gehirnvolumen im Alter von 10 Jahren noch richtig beschreibt. ☐

35.0 Die Anzahl der in Deutschland pro Monat verschickten SMS soll näherungsweise durch

die Funktion S mit der Gleichung $S(t) = \frac{a}{1,56e^{bt} - 1}$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+$ und $a, b \in \mathbb{R}$ modelliert

werden. Dabei gibt t die Zeit ab Anfang 2013 ($t = 0$) in Monaten an und $S(t)$ die Anzahl der zum Zeitpunkt t gesendeten SMS in Milliarden Stück pro Monat.

Bei Rechnungen kann auf die Verwendung von Einheiten verzichtet werden.

Runden Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll. (Abitur 2021 AI)

35.1 Aus statistischen Daten ergeben sich die Werte $S(0) = 3,80$ und $S(12) = 2,45$.

Bestimmen Sie mithilfe der beiden Angaben die Werte der Parameter a und b .

(Mögliche Ergebnisse: $a \approx 2,12$; $b \approx 0,015$) ☐

35.2 Ermitteln Sie die Anzahl der pro Monat gesendeten SMS, die sich nach diesem Modell langfristig einstellen wird. ☐

35.3 Zeigen Sie rechnerisch, dass nach diesem Modell die Anzahl der versendeten SMS pro Monat seit Januar 2013 stets gesunken ist. ☒

35.4 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion S für $0 \leq t \leq 100$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Wählen Sie auf beiden Achsen einen geeigneten Maßstab. ☐

35.5 Es gilt für den Wert des bestimmten Integrals: $\int_0^{84} S(t) dt \approx 116,98$ (Nachweis nicht

erforderlich !). Die folgende Tabelle gibt die Anzahl der in Deutschland in den einzelnen Kalenderjahren 2013 bis 2019 verschickten SMS in Milliarden an (Quelle: Bundesnetzagentur).

Kalenderjahr	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
SMS in Mrd.	37,9	22,3	16,6	12,7	10,3	8,9	7,9

Interpretieren Sie den Wert des angegebenen Integrals und überprüfen Sie die Realitätsnähe des Modells mithilfe der von der Bundesnetzagentur veröffentlichten Zahlen. ☒

36.0 In einem Freizeitbad wird eine schnell wachsende Bambusart gepflanzt, die als Sichtschutz dienen soll.

Die Modellfunktion B mit der Gleichung $B(t) = \frac{A}{2 + 98e^{ct}}$ und $t \in \mathbb{R}_0^+$ sowie $A, c \in \mathbb{R}$

beschreibt näherungsweise die Höhe der Bambuspflanzen in Zentimeter. Dabei gibt t die Zeit nach der Pflanzung in Tagen an. Die Pflanzung findet zum Zeitpunkt $t = 0$ statt. Bei Rechnungen kann auf die Verwendung von Einheiten verzichtet werden. Runden Sie Ihre Ergebnisse gegebenenfalls auf eine Nachkommastelle. (Abitur 2021 AII)

36.1 Ermitteln Sie die Werte der Parameter A und c , wenn die Bambushöhe am Pflanztag 4 cm beträgt und der Bambus 20 Tage nach der Pflanzung bereits 1 m hoch ist. ☐
(Mögliche Ergebnisse: $A = 400$; $c \approx -0,2$)

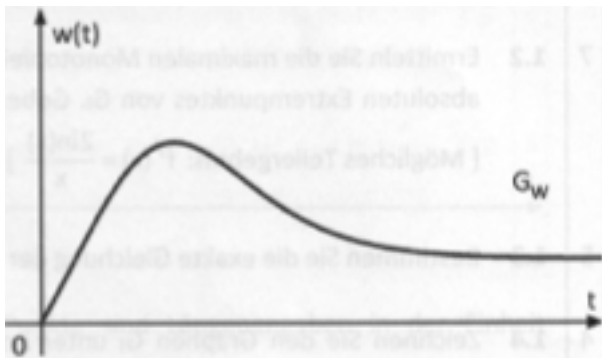
36.2 Um einen ausreichenden Sichtschutz der Badegäste zu gewährleisten, müssen die Bambuspflanzen mindestens 170 cm hoch sein. Ermitteln Sie, am wievielten Tag nach der Pflanzung die Bambuspflanzen eine Höhe von 170 cm erreichen. ☐

36.3 Bestimmen Sie, welche Höhe die Bambuspflanzen nach langer Zeit erreichen. ☐

36.4 Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion B. ☒

36.5 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion B für $t \in [0; 80]$ unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte in ein kartesisches Koordinatensystem. Wählen Sie auf beiden Achsen einen geeigneten Maßstab. ☐

37.0 Nach Öffnung einer Schleuse gibt für $t \geq 0$ die Funktion w mit $w(t) = \frac{e^{2t} + 60e^t - 60}{e^{2t} + 10e^t + 25}$ die zeitliche Entwicklung des Wasserdurchflusses in einem Kanal an einer Messstelle an. Der Wasserdurchfluss ist das Volumen des Wassers in m^3 , das an dieser Stelle pro Sekunde vorbeifließt. Die Zeit t wird ab Öffnung der Schleuse zum Zeitpunkt $t = 0$ in Sekunden gemessen. Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen G_w der Funktion w . Bei allen Rechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden. Runden Sie alle Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen. (Abitur 2022 AI)



37.1 Geben Sie den Wasserdurchfluss eine Sekunde nach Öffnung der Schleuse und für $t \rightarrow \infty$ an. ☐

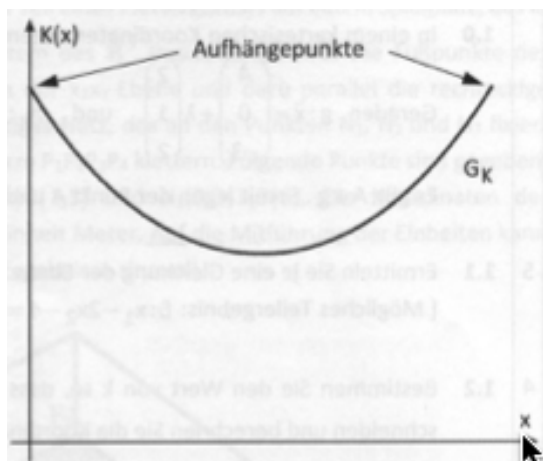
37.2 Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem der Wasserdurchfluss erstmals seit Beginn der Beobachtung den Wert von $1,0 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$ überschreitet. ☐

37.3 Zeigen Sie, dass die Funktion w auch durch die Gleichung $w(t) = \frac{e^{2t} + 60e^t - 60}{(e^t + 5)^2}$ dargestellt werden kann. ☐

37.4 Berechnen Sie die Koordinaten des Hochpunktes von G_w und interpretieren Sie diese im Sachzusammenhang. Hinweis: Der Nachweis, dass ein Hochpunkt vorliegt, muss nicht erbracht werden. ☒

(mögliches Teilergebnis: $\dot{w}(t) = \frac{-50e^{2t} + 420e^t}{(e^t + 5)^3}$)

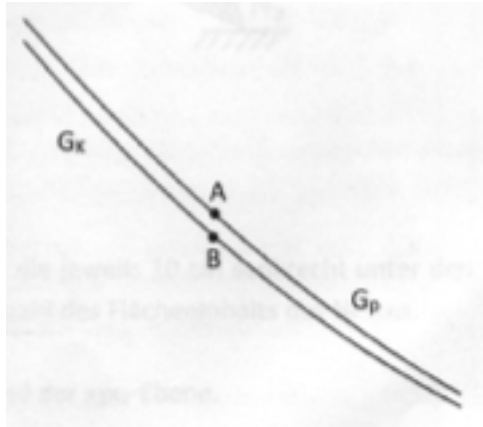
38.0 Eine Kette ist an ihren Enden an zwei Punkten aufgehängt. Die beiden Aufhängepunkte haben einen waagrechten Abstand von 10 cm und sind auf gleicher Höhe angebracht. Der Verlauf der Kette wird modellhaft in einem kartesischen Koordinatensystem durch den Graphen G_K (siehe Abbildung) $K(x) = 2(e^{0,25x-1,25} + e^{-0,25x+1,25})$ mit $D_K = [0; 10]$ der Funktion K beschrieben. Die Funktion K ist dabei gegeben durch die Gleichung. Die Koordinaten der Punkte sind Längenangaben in der Einheit Zentimeter. Auf die Mitführung der Einheiten kann verzichtet werden. (Abitur 2022 All)



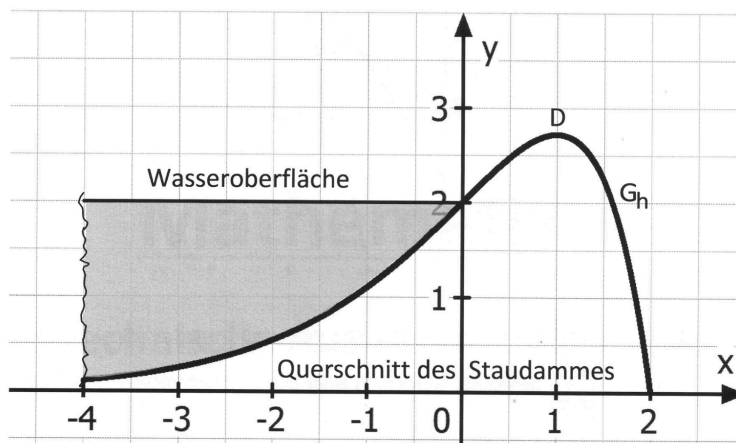
38.1 Ermitteln Sie die Koordinaten des tiefsten Punktes der Kette und führen Sie den rechnerischen Nachweis, dass es sich dabei um einen lokalen Tiefpunkt handelt. ☒
(mögliches Teilergebnis: $K'(x) = 0,5(e^{0,25x-1,25} - e^{-0,25x+1,25})$)

38.2 Der Kettenverlauf kann durch eine Parabel G_p angenähert werden, die durch den Punkt $Q(0|7,554)$ und ihren Scheitelpunkt $S(5|4)$ verläuft. Ermitteln Sie die Gleichung der zugehörigen quadratischen Funktion p . ☐

- 38.3 Die Parabel G_p verläuft für $x \in]0;5[$ stets oberhalb des Graphen G_k . In diesem Bereich wird der Abstand der senkrecht übereinander liegenden Punkte $A(x|p(x)) \in G_p$ und $B(x|k(x)) \in G_k$ betrachtet. Die Abbildung zeigt einen nicht maßstabsgetreuen, vergrößerten Ausschnitt von G_p und G_k . Der größte dieser Abstände ist ein Maß dafür, wie gut die Parabel G_p den Graphen G_k im Bereich $0 < x < 5$ annähert. Beschreiben Sie, wie dieser größte Abstand rechnerisch bestimmt werden kann. Hinweis: Eine rechnerische Lösung soll nicht durchgeführt werden. 



- 39.0 Die Abbildung zeigt modellhaft den Querschnitt eines Staudammes, der 100 Meter lang ist. Die Querschnittsfläche des Staudammes hat über die gesamte Länge hinweg die gleiche Form. Die krummlinige Begrenzungslinie der Querschnittsfläche kann durch den Graphen der Funktion h mit $h(x) = (2-x)e^x$ mit $D_h = [-4;2]$ in einem kartesischen Koordinatensystem dargestellt werden. Dabei entspricht eine Längeneinheit im Koordinatensystem einem Meter in der Realität. Bei den Rechnungen kann auf die Mitführung der Einheiten verzichtet werden. (Abitur 2023 Teil 1)

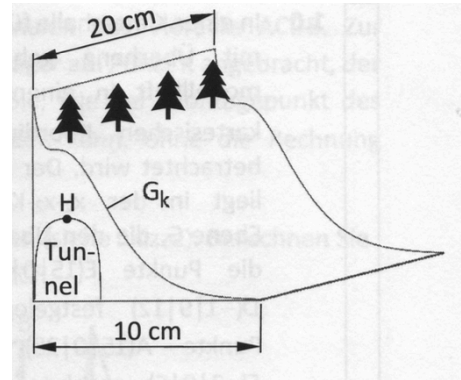


- 39.1 Der Punkt D ist der höchste Punkt des Staudammes. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes D. Weisen Sie auch nach, dass ein relativer Hochpunkt vorliegt. 

- 39.2 Ein Kubikmeter des zur Aufschüttung des Dammes verwendeten Materials hat die Masse 1,8 Tonnen. Aufgrund der Verdichtung des Materials beim Bau des Staudammes ist das Volumen des tatsächlich benötigten Materials um 6 % höher, als das theoretisch berechnete. Stellen Sie einen Ansatz auf, mit dem man die Masse des aufgeschütteten Materials in Tonnen berechnen kann.

Hinweis: Die Berechnung soll nicht durchgeführt werden. 

- 40.0 Für den Hintergrund einer Modelleisenbahn soll mithilfe eines 3D-Druckers eine Berglandschaft gedruckt werden. Der Graph G_k der Funktion k mit der Gleichung $k(x) = a(x^2 + 1) \cdot e^{-x}$, $a \in \mathbb{R}$ und dem Definitionsbereich $D_k = [0; 10]$ beschreibt die obere Kontur der Berglandschaft. Die Variable x gibt den Abstand vom linken Rand der Berglandschaft in cm und der Funktionswert $k(x)$ die Höhe der Konturlinie in cm über dem Boden an.



Auf die Mitführung von Einheiten während der Rechnungen kann verzichtet werden. Runden Sie Ihre Ergebnisse gegebenenfalls auf zwei Nachkommastellen.
(Abitur 2023 All)

- 40.1 Die Funktion k ist im gesamten Definitionsbereich streng monoton abnehmend. Bestimmen Sie den Wert des Parameters a , wenn die Berglandschaft an ihrem höchsten Punkt 9 cm hoch sein soll. 

Für die folgenden Teilaufgaben gilt: $k(x) = 9(x^2 + 1) \cdot e^{-x}$

- 40.2 An der Berglandschaft sollen Bäumchen befestigt werden. Damit diese aufrecht stehen, müssen sie an einer Stelle mit waagrechter Tangente angebracht werden. Berechnen Sie dazu die Koordinaten des Punktes auf der Konturlinie, der diese Bedingung erfüllt. 

- 40.3 Zeigen Sie, dass die Funktion K mit $K(x) = -9(x^2 + 2x + 3) \cdot e^{-x}$ für $D_K = [0; 10]$ eine

Stammfunktion von k ist. Bestimmen Sie den Wert des Integrals $I = 20 \cdot \int_0^{10} k(x) dx$ und

interpretieren Sie Ihr Ergebnis im Sachzusammenhang. 
(Teilergebnis: $I \approx 539,00$)

- 40.4 Zur Herstellung der Berglandschaft wird Kunstharz zu einem Preis von 59,90 € für 1000 cm^3 benötigt. Ermitteln Sie den Materialpreis für eine Berglandschaft gleicher Form, die nicht 20 cm, sondern einen Meter lang ist. Verluste an Kunstharz durch den Herstellungsprozess sollen dabei nicht berücksichtigt werden. 

40.5.0 Nun wird zusätzlich die Funktion h mit $h(x) = \ln(-x^2 + 4x) + 2$ in dem maximalen Definitionsbereich $D_h =]0;4[$ betrachtet. Der Teil des Graphen G_h der Funktion h , der über der x -Achse liegt, beschreibt die Begrenzungslinie eines Tunnels (siehe 40.0), der nach der Herstellung durch den 3D-Drucker in die Berglandschaft gefräst werden soll.

40.5.1 Für die Kalibrierung der Fräse werden die Schnittpunkte von G_h mit der x -Achse benötigt.

Ermitteln Sie die x -Koordinaten der Schnittpunkte. 

40.5.2 Der Punkt H (siehe 40.0) ist der höchste Punkt des Tunnels (Nachweis nicht erforderlich).

Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes H . 

41.0 Bei der Milchsäuregärung wandeln Bakterien die in Milch befindliche Laktose in

Milchsäure um. Die Funktion $M: t \mapsto \frac{a}{1 + 9 \cdot e^{-bt}}$ mit $a, b, t \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$ gibt die

Milchsäurekonzentration $M(t)$ in Abhängigkeit der Zeit t an. Dabei wird $M(t)$ in Gramm pro Liter (g/l) gemessen und t gibt die Zeit in Stunden an, die seit Beobachtungsbeginn vergangen ist. Bei Rechnungen kann auf die Verwendung von Einheiten verzichtet werden. Runden Sie Ihre Ergebnisse gegebenenfalls auf eine Nachkommastelle.

(Abitur 2025 All)

41.1 In einem Laborversuch wird die Milchsäurekonzentration von einem Liter Milch stündlich gemessen. Zu Beobachtungsbeginn ($t = 0$) beträgt die Milchsäurekonzentration 0,8 Gramm pro Liter und drei Stunden nach Beobachtungsbeginn 5,0 Gramm pro Liter. Berechnen Sie die Werte der Parameter a und b so, dass die Modellfunktion mit diesen beiden Messwerten im Einklang steht. 

41.2.0 Im Folgenden gilt $a = 8$ und $b = -0,9$. Somit ergibt sich $M(t) = \frac{8}{1 + 9 \cdot e^{-0,9t}}$ mit $t \geq 0$.

Der Graph von M wird mit G_M bezeichnet.

41.2.1 Zeigen Sie, dass die Milchsäurekonzentration nach diesem Modell stets zunimmt. 

(mögliches Teilergebnis: $\dot{M}(t) = \frac{64,8 \cdot e^{-0,9t}}{(1 + 9 \cdot e^{-0,9t})^2}$)

41.2.2 Für die zweite Ableitungsfunktion $\ddot{M}$ gilt $\ddot{M}(t) = -58,32 \cdot e^{-0,9t} \cdot \frac{1 - 9 \cdot e^{-0,9t}}{(1 + 9 \cdot e^{-0,9t})^3}$ mit $t > 0$

(Nachweis nicht erforderlich). Ermitteln Sie den Zeitpunkt t_1 , zu dem die erste

Ableitungsfunktion $\dot{M}$ ein absolutes Maximum besitzt. Berechnen Sie die Differenz

$M(t_1 + 0,5) - M(t_1 - 0,5)$ und interpretieren Sie diesen Wert im Sachzusammenhang. 

41.2.3 Zeichnen Sie G_M im Bereich $0 \leq t \leq 13$ in ein Koordinatensystem. Wählen Sie auf beiden Achsen einen geeigneten Maßstab. Kennzeichnen Sie auch die Differenz $M(t_1 + 0,5) - M(t_1 - 0,5)$ in Ihrer Abbildung. 

41.2.4 Weisen Sie nach, dass die Funktion $G: t \mapsto \frac{80}{9} \ln(9 + e^{0,9t})$ mit der Definitionsmenge $D_G = [0; +\infty[$ eine Stammfunktion von M ist. ☐

41.2.5 Die durchschnittliche Milchsäurekonzentration $\bar{M}$ in $\frac{g}{l}$ über einen Zeitraum $[t_1; t_2]$ in

Stunden beträgt $\bar{M} = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} M(t) dt$. Berechnen Sie die durchschnittliche

Milchsäurekonzentration in dieser Milchprobe in den ersten sechs Beobachtungsstunden. 

42.0 Mammutbäume sind die größten Bäume der Welt. Manche Exemplare wachsen im nordamerikanischen Kontinent über 100 Meter hoch und sind über 2000 Jahre alt. Mammutbäume gelten als stabile und klimaresiliente Bäume mit einem hohen CO_2 -Aufnahmepotential, weshalb sie als sinnvolle Ergänzung für europäische Wälder diskutiert werden. Die Funktion $h: t \mapsto \frac{108}{2 + 51 \cdot e^{-0,065t}}$ mit $t \in [0; 100]$ beschreibt näherungsweise die Höhe eines Mammutbaumes in Metern. Dabei gibt t die Zeit in Jahren an, die seit der Pflanzung eines Jungbaumes durch die Forstwirtschaft verstrichen ist. Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden. Runden Sie Ihre Ergebnisse gegebenenfalls auf zwei Nachkommastellen. (Abitur 2026 AI)

42.1 Aktuelle Forschungsarbeiten liefern folgende Daten zum Höhenwachstum von Mammutbäumen in Europa:

t in Jahren	0	20	50	100
Baumhöhe in Metern	2 - 3	5 - 10	25 - 30	50 - 54

Überprüfen Sie, ob die gegebenen wissenschaftlichen Daten zum Höhenwachstum mit den entsprechenden Baumhöhen, welche sich aus der Modellfunktion h ergeben, im Einklang stehen. ☐

42.2 Ermitteln Sie alle Zeitpunkte $t \in [0; 100]$, an denen laut Modell die momentane Wachstumsrate dieses Mammutbaumes 0,78 Meter pro Jahr beträgt. 

(mögliches Teilergebnis: $\dot{h}(t) = \frac{358,02 \cdot e^{-0,065t}}{(2 + 51 \cdot e^{-0,065t})^2}$)

42.3 Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse sowie weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion h im Bereich $0 \leq t \leq 100$ in ein kartesisches Koordinatensystem.

Maßstab Abszisse: 10 Jahre $\hat{=}$ 1 cm, Maßstab Ordinate: 10 Meter $\hat{=}$ 1 cm. ○

42.4 Bestimmen Sie die durchschnittliche Wachstumsrate, mit der die Höhe eines Mammutbaumes dem Modell zufolge im Zeitraum $[20;60]$ pro Jahr zunimmt.

Bestätigen Sie Ihr Ergebnis graphisch, indem Sie in der Zeichnung aus Teilaufgabe 42.3 eine entsprechende Gerade und das zur Rechnung passende Steigungsdreieck einzeichnen. Geben Sie dabei auch die zum Steigungsdreieck gehörigen Werte Δt und Δh an. ○

42.5 Zeigen Sie, dass $h(t)$ zum Term $\frac{108 \cdot e^{0,065t}}{2 \cdot e^{0,065t} + 51}$ äquivalent ist und ermitteln Sie eine Stammfunktion H der Funktion h . ⊗

Lösungen

1.1

$$p(0) = \frac{1000}{1+7e^{-0}} = \frac{1000}{8} = 125$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1000}{1+7e^{-t}} \right) = 1000$$

$$\frac{1000}{1+7e^{-t_1}} = 875 \Rightarrow 1000 = 875 \cdot (1+7e^{-t_1}) \Rightarrow \frac{8}{7} = 1+7e^{-t_1}$$

$$\Rightarrow 7e^{-t_1} = \frac{1}{7} \Rightarrow e^{-t_1} = \frac{1}{49} \Rightarrow -t_1 = \ln \frac{1}{49} \Rightarrow t_1 = -\ln \frac{1}{49} \approx 3,89$$

1.2

•

$p(t)$ ist die Änderung der Anzahl der Pilze pro Stunde

$$\bullet \quad p(t) = \frac{0 \cdot (1+7e^{-t}) - 1000 \cdot (7e^{-t} \cdot (-1))}{(1+7e^{-t})^2} = \frac{7000e^{-t}}{(1+7e^{-t})^2}$$

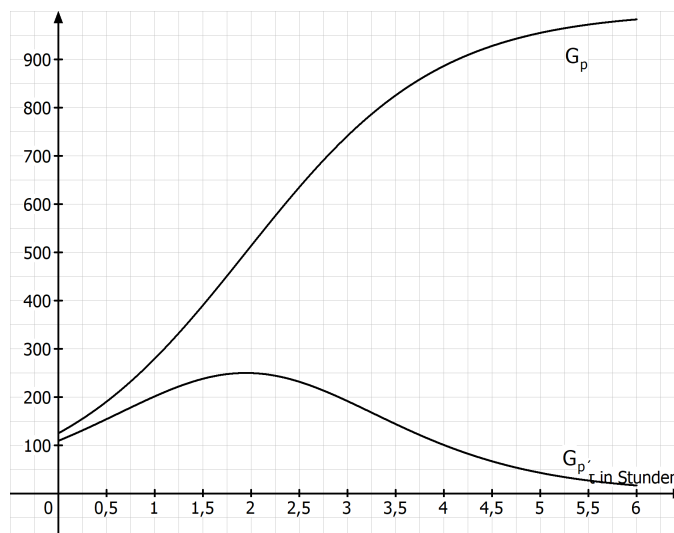
•

$p(t) > 0$ für alle $t \geq 0$, da Zähler und Nenner für alle $t \geq 0$ positiv sind.

$\Rightarrow$ die Anzahl der Pilze nimmt im gesamten Beobachtungszeitraum echt monoton zu.

1.3

t	0	1	ln7	3	4	5	6
$\bullet p(t)$	109,375	201,471	250	191,649	100,726	43,0125	16,7644
$p(t)$	125	279,708		741,559	886,36	954,959	982,945



2.1

$$(I) A_0 \cdot e^{-550k} = 14 \Rightarrow A_0 = \frac{14}{e^{-550k}}$$

$$(II) A_0 \cdot e^{-1162k} = 13$$

$$\Rightarrow \frac{14}{e^{-550k}} \cdot e^{-1162k} = 13 \Rightarrow e^{-612k} = \frac{13}{14} \Rightarrow -612k = \ln \frac{13}{14}$$

$$\Rightarrow k = \frac{\ln \frac{13}{14}}{-612} \approx 0,121 \cdot 10^{-3}$$

$$\Rightarrow A_0 = \frac{14}{e^{-550 \cdot 0,121 \cdot 10^{-3}}} \approx 15$$

2.2

$$0,79 = e^{-0,121 \cdot 10^{-3} \cdot t} \Rightarrow -0,121 \cdot 10^{-3} \cdot t = \ln 0,79 \Rightarrow t = \frac{\ln 0,79}{-0,121 \cdot 10^{-3}} \approx 1948$$

$\Rightarrow$ Vor ungefähr 1948 Jahren wurden die Papyrusstauden geerntet.

2.3

$$\frac{1}{2} \cdot A_0 = A_0 \cdot e^{-k \cdot t_H} \Rightarrow e^{-k \cdot t_H} = \frac{1}{2} \Rightarrow -k \cdot t_H = \ln \frac{1}{2} \Rightarrow t_H = \frac{\ln \frac{1}{2}}{-k} = \frac{\ln 2}{k}$$

$$t_H = \frac{\ln 2}{0,121 \cdot 10^{-3}} \approx 5728,49$$

3.1

$$90 = 110 + (60 - 110)e^{-\alpha \cdot 3} \Rightarrow -50e^{-\alpha \cdot 3} = -20 \Rightarrow e^{-\alpha \cdot 3} = 0,4$$

$$\Rightarrow -3\alpha = \ln 0,4 \Rightarrow \alpha = \frac{\ln 0,4}{-3} \approx 0,31$$

$$3.2 \quad U(5) = 110 + (60 - 110)e^{-0,31 \cdot 5} \approx 99,39$$

$$3.3 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (110 + (u_0 - 110)e^{-\alpha \cdot t}) = 110$$

Der Glukosegehalt im Blut des Patienten stellt sich auf längere Sicht auf 110 [mg/dl] ein.

4.1

$$v(2) = \ln(100) - 2\ln(10 - 0,1 \cdot 2) = 0,04 \text{ [km/sec]}$$

$$\ln(100) - 2\ln(10 - 0,1 \cdot t_1) = 0,3 \Rightarrow 2\ln(10 - 0,1 \cdot t_1) = \ln(100) - 0,3 \approx 4,305$$

$$\Rightarrow \ln(10 - 0,1 \cdot t_1) \approx 2,15 \Rightarrow 10 - 0,1 \cdot t_1 \approx e^{2,15} \Rightarrow 0,1 \cdot t_1 \approx 10 - e^{2,15}$$

$$\Rightarrow t_1 \approx \frac{10 - e^{2,15}}{0,1} \approx 14,15 \text{ sec}$$

4.2

$$m(0) = 10 \text{ [to]} \Rightarrow 0,85 \cdot 10 = 8,5 \text{ [to]}$$

$$\Rightarrow 1,5 = 10 - 0,1 \cdot t_E \Rightarrow 0,1 \cdot t_E = 8,5 \Rightarrow t_E = 85 \text{ [sec]}$$

4.3

$$\frac{dv(t)}{dt} = -2 \cdot \frac{1}{10 - 0,1t} \cdot (-0,1) = \frac{0,2}{10 - 0,1t}$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = 0 \Rightarrow 0,2 = 0 \text{ (f)}$$

Nenner und Zähler positiv für $t \in [0; 85]$

$\Rightarrow v(t)$ ist streng monoton steigend für $t \in [0; 85]$.

$$v(85) = \ln(100) - 2 \cdot \ln(10 - 0,1 \cdot 85) \approx 3,79 \text{ [km/sec]}$$

4.4

$$\begin{aligned} \frac{ds(t)}{dt} &= -2 \cdot \ln(10 - 0,1t) + (200 - 2t) \cdot \frac{1}{10 - 0,1t} \cdot (-0,1) + (2 + \ln(100)) = \\ &= -2 \cdot \ln(10 - 0,1t) - \frac{20 - 0,2t}{10 - 0,1t} + 2 + \ln(100) = \\ &= -2 \cdot \ln(10 - 0,1t) - 2 \cdot \frac{10 - 0,1t}{10 - 0,1t} + 2 + \ln(100) = -2 \cdot \ln(10 - 0,1t) + \ln(100) = v(t) \end{aligned}$$

$\Rightarrow s(t)$ ist Stammfunktion von $v(t)$

$$s(t_E) - s(0) = s(85) - s(0) =$$

$$\left[(200 - 2 \cdot 85) \cdot \ln(10 - 0,1 \cdot 85) + 85 \cdot (2 + \ln(100)) - 200 \cdot \ln(10) \right] - \left[200 \cdot \ln(10) - 200 \cdot \ln(10) \right] =$$

$$= 113,09 \text{ [km]}$$

Das ist die Strecke, die die Rakete zurücklegt, bis der Treibstoff verbraucht ist.

5.1

$$D(0,5) = c \cdot 0,5^2 \cdot e^{-0,5+5} + 20 \Rightarrow 25,6 = \frac{1}{4} \cdot c \cdot e^{4,5} + 20$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \cdot c \cdot e^{4,5} = 5,6 \Rightarrow c = \frac{4 \cdot 5,6}{e^{4,5}} \approx 0,25$$

5.2

$$\frac{dD(t)}{dt} = c \cdot (2t \cdot e^{-t+5} + t^2 \cdot e^{-t+5} \cdot (-1)) = c \cdot e^{-t+5} \cdot (2t - t^2)$$

$$\frac{dD(t)}{dt} = 0 \Rightarrow 2t - t^2 = 0 \quad (\text{da } c \text{ und } e^{-t+5} \text{ immer positiv sind})$$

$$\Rightarrow t(2-t) = 0 \Rightarrow t_1 = 0 \quad t_2 = 2$$

Skizze von $\frac{dD(t)}{dt}$: c und e^{-t+5} immer positiv

Skizze von $(2t - t^2)$:

$\Rightarrow$ nach 2 Stunden nimmt die Wasserdurchflussmenge wieder ab.

5.3 Nach Aufgabe 5.2 ergibt sich die maximale Wasserdurchflussmenge zum Zeitpunkt 2 Stunden.

$$D(2) = 0,25 \cdot 2^2 \cdot e^{-2+5} + 20 = e^3 + 20 \approx 40,09$$

$\Rightarrow$ eine Ausuferung findet nicht statt.

5.4

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (c \cdot t^2 \cdot e^{-t+5} + 20)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (t^2 \cdot e^{-t+5}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t^2}{e^{t-5}} \right) \stackrel{I'H}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{2t}{e^{t-5}} \right) \stackrel{I'H}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{e^{t-5}} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} (c \cdot t^2 \cdot e^{-t+5} + 20) = 20$$

$\Rightarrow$ Langfristig stellt sich eine Wasserdurchflussmenge von 20 [m³/h] ein.

5.5

$$\frac{dV(t)}{dt} = -0,25 \cdot [(2t+2) \cdot e^{-t+5} + (t^2 + 2t + 2) \cdot e^{-t+5} \cdot (-1)] + 20 =$$

$$= -0,25 \cdot [e^{-t+5}(2t+2-t^2-2t-2)] + 20 =$$

$$= -0,25 \cdot [-t^2 \cdot e^{-t+5}] + 20 = 0,25t^2 \cdot e^{-t+5} + 20 = D(t)$$

$\Rightarrow V(t)$ ist Stammfunktion von $D(t)$

$$\int_0^6 D(t) dt = \left[-0,25(t^2 + 2t + 2) \cdot e^{-t+5} + 20t + 0,5e^5 \right]_0^6 =$$

$$= \left[-0,25(36 + 12 + 2) \cdot e^{-1} + 120 + 0,5e^5 \right] - \left[-0,25 \cdot 2 \cdot e^5 + 0,5e^5 \right] =$$

$$= -12,5e^{-1} + 120 + 0,5e^5 + 0,5e^5 - 0,5e^5 = -12,5e^{-1} + 120 + 0,5e^5 \approx 189,61$$

$\Rightarrow$ Dieser Wert ist die Wassermenge in m³,

die in den ersten sechs Stunden durchgeflossen ist.

6.1

$$G(0) = 20 \cdot e^{-0,2 \cdot 0} + 70 = 90$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (20 \cdot e^{-0,2t} + 70) = 70 = G_{\text{ideal}}$$

6.2

$$75\% \text{ von } 20 \text{ kg} \hat{=} 15 \text{ kg}$$

$$\Rightarrow 75 = 20 \cdot e^{-0,2 \cdot t_1} + 70 \Rightarrow 20 \cdot e^{-0,2 \cdot t_1} = 5 \Rightarrow e^{-0,2 \cdot t_1} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow -0,2 \cdot t_1 = \ln(0,25) \Rightarrow t_1 = \frac{\ln(0,25)}{-0,2} \approx 6,93$$

6.3

$$\bullet \quad G(t) = 20 \cdot e^{-0,2t} \cdot (-0,2) = -4 \cdot e^{-0,2t}$$

$$\bullet \quad G(0) = -4 \cdot e^{-0,2 \cdot 0} = -4$$

$$\Rightarrow \text{lineare Abnahme: } L(t) = 90 - 4t$$

$$\Rightarrow 90 - 4t_2 = 70 \Rightarrow 4t_2 = 20 \Rightarrow t_2 = 5$$

7.1 $1745 = N_0 \cdot e^{(30,5 - 0,5^2)} \Rightarrow 1745 = N_0 \cdot e^{1,25} \Rightarrow N_0 = \frac{1745}{e^{1,25}} \approx 500$

7.2

$$\bullet \quad N(t) = N_0 \cdot e^{(3t - t^2)} \cdot (3 - 2t)$$

$$\bullet \quad N(t) = 0 \Rightarrow 3 - 2t = 0 \quad (\text{da } N_0 \text{ und } e^{3t - t^2} \text{ positiv sind}) \Rightarrow t = 1,5$$

Nachweis Maximum:

$$\bullet \bullet \quad N(t) = N_0 \cdot \left[e^{3t - t^2} \cdot (3 - 2t)^2 + e^{3t - t^2} \cdot (-2) \right] = N_0 \cdot e^{3t - t^2} \cdot \left[(3 - 2t)^2 - 2 \right]$$

$$\bullet \bullet \quad N(1,5) < 0 \Rightarrow \text{Maximum bei } t = 1,5$$

$$N(1,5) = 500 \cdot e^{3 \cdot 1,5 - 1,5^2} = 500 \cdot e^{2,25} \approx 4744$$

7.3

$$\begin{aligned} \ddot{N}(t) = 0 &\Rightarrow (3-2t)^2 - 2 = 0 \Rightarrow (3-2t)^2 = 2 \Rightarrow 3-2t = \pm\sqrt{2} \\ &\Rightarrow 2t = 3 \pm \sqrt{2} \Rightarrow t_1 = \frac{3+\sqrt{2}}{2} (\approx 2,21) \quad t_2 = \frac{3-\sqrt{2}}{2} (\approx 0,79) \end{aligned}$$

Skizze von $\ddot{N}(t)$: $500 \cdot e^{3t-t^2}$ immer positiv

Skizze von $[(3-2t)^2 - 2]$:

$\Rightarrow$ bei $t = \frac{3-\sqrt{2}}{2}$ ist das Wachstum am stärksten,

bei $t = \frac{3+\sqrt{2}}{2}$ nimmt die Kultur am stärksten ab.

$\Rightarrow t_1$ und t_2 sind die Abszissen der Wendepunkte von N .

7.4

$$500 \cdot e^{3t-t^2} < 1 \Rightarrow e^{3t-t^2} < \frac{1}{500} \Rightarrow 3t-t^2 < \ln \frac{1}{500} \Rightarrow -t^2 + 3t - \ln \frac{1}{500} < 0$$

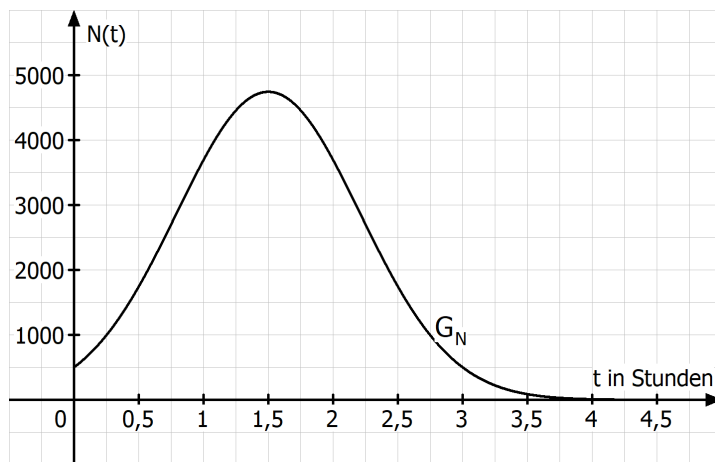
$$\begin{aligned} \Rightarrow -t^2 + 3t - \ln \frac{1}{500} = 0 &\Rightarrow t_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot (-1) \cdot (-\ln \frac{1}{500})}}{-2} \approx \\ &\approx \frac{-3 \pm \sqrt{33,86}}{-2} \approx \frac{-3 \pm 5,82}{-2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (t_1 \approx -1,41 \notin D) \quad t_2 \approx 4,41$$

Skizze von $\left(-t^2 + 3t - \ln \frac{1}{500}\right)$:

$$\Rightarrow t > 4,41 \text{ [h]}$$

7.5



8.1

$$(I) M(13) = 36,5 \Rightarrow 20e^{-13b} + c = 36,5$$

$$(II) \dot{M}(13) = 0$$

$$\dot{M}(t) = 4 \cdot \left[e^{-bt} + (t-8) \cdot e^{-bt} \cdot (-b) \right] = 4 \cdot e^{-bt} [1 - bt + 8b]$$

$$\dot{M}(13) = 4 \cdot e^{-13b} [1 - 5b] = 0 \Rightarrow 1 - 5b = 0 \text{ (da e-Funktion immer positiv ist)}$$

$$\Rightarrow b = 0,2$$

$$(I) \Rightarrow 20e^{-2,6} + c = 36,5 \Rightarrow c = 36,5 - 20e^{-2,6} \approx 35,0145$$

$$8.2.1 \quad M(0) = 4 \cdot (-8) \cdot e^0 + 35 = -32 + 35 = 3 \text{ [kg]}$$

8.2.2

$$\dot{M}(t) = 4 \cdot e^{-0,2t} \cdot (2,6 - 0,2t)$$

$$\ddot{M}(t) = 4 \cdot \left[e^{-0,2t} \cdot (-0,2) \cdot (2,6 - 0,2t) + e^{-0,2t} \cdot (-0,2) \right] = -0,8 \cdot e^{-0,2t} \cdot (3,6 - 0,2t)$$

$$\ddot{M}(t) = 0 \Rightarrow -0,8 \cdot e^{-0,2t} \cdot (3,6 - 0,2t) = 0 \Rightarrow 3,6 - 0,2t = 0 \Rightarrow t = 18$$

Skizze von $\ddot{M}$: $-0,8$ negativ; $e^{-0,2t}$ positiv

Skizze von $(3,6 - 0,2t)$:

$\Rightarrow G(M)$ fällt bei $t = 18$ mit größtmöglicher Steigung, also erleben die Lebewesen im Alter von 18 Jahren die größte Gewichtsabnahme.

8.2.3

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(4e^{-0,2t} \cdot (t-8) + 35 \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(4 \cdot \frac{t-8}{e^{0,2t}} + 35 \right)$$

Untersuchung von $\frac{t-8}{e^{0,2t}}$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t-8}{e^{0,2t}} \right)^{l'H} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{e^{0,2t} \cdot 0,2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \left(4 \cdot \frac{t-8}{e^{0,2t}} + 35 \right) = 35$$

$\Rightarrow$ mit hohem Alter erreichen die Tiere im Durchschnitt ein Gewicht von 35 kg.

9.1 Bei Wette A erreicht der Applaus bereits nach 1 Sekunde seine maximale Lautstärke. Der Applaus ist sehr spontan und schwächt sich rasch ab.

Bei Wette B erreicht der Applaus erst nach 2 Sekunden sein Maximum. Der Applaus nimmt nur langsam ab. Bei Wette B ist der Applaus zwar schwächer als bei A, aber länger andauernd.

9.2

$$g'(x) = 5 \cdot \left[1 \cdot e^{-x+1} + x \cdot e^{-x+1} \cdot (-1) \right] = 5e^{-x+1} (1-x)$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow 1-x = 0 \quad (\text{da } 5e^{-x+1} \neq 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}_0^+) \Rightarrow x = 1$$

Skizze von g' : $5e^{-x+1}$ immer positiv

Skizze von $(1-x)$:

$$\Rightarrow x = 1 \text{ HP}$$

$\Rightarrow$ die Funktion g beschreibt die Kurve A

9.3

$$\begin{aligned} h_a'(x) &= \frac{384 \cdot (x^2 + a)^2 - 384x \cdot 2(x^2 + a) \cdot 2x}{(x^2 + a)^4} = \frac{384 \cdot (x^2 + a) - 1536x^2}{(x^2 + a)^3} = \\ &= \frac{-1152x^2 + 384a}{(x^2 + a)^3} \end{aligned}$$

$$h_a'(2) = 0 \Rightarrow -1152 \cdot 4 + 384a = 0 \Rightarrow a = 12$$

9.4

$$G_1'(x) = -5 \left[1 \cdot e^{-x} + (x+1) \cdot e^{-x} \cdot (-1) \right] = -5e^{-x} \cdot [1 - (x+1)] = 5x \cdot e^{-x}$$

$\Rightarrow G_1$ ist keine Stammfunktion von g

$$G_2'(x) = -5 \left[1 \cdot e^{-x+1} + (x+1) \cdot e^{-x+1} \cdot (-1) \right] = -5e^{-x+1} [1 - (x+1)] = 5xe^{-x+1} = g(x)$$

$\Rightarrow G_2$ ist eine Stammfunktion von g

$$G_3'(x) = -5 \left[1 \cdot e^{-x+1} + x \cdot e^{-x+1} \cdot (-1) \right] = -5e^{-x+1} [1 - x] = 5(x-1) \cdot e^{-x+1}$$

$\Rightarrow G_3$ ist keine Stammfunktion von g

$$\int_0^{10} g(x) dx = \left[-5(x+1)e^{-x+1} \right]_0^{10} = -5 \cdot 11 \cdot e^{-9} - (-5 \cdot e^1) = 5e - 55 \cdot e^{-9} \approx 13,58$$

$$\int_0^{12} h_{12}(x) dx = \left[\frac{-192}{x^2 + 12} \right]_0^{10} = \frac{-192}{112} - \left(\frac{-192}{12} \right) = 14 \frac{2}{7} \approx 14,29$$

$\Rightarrow$ die Wette B ist beliebter als Wette A;

10.1

Stetigkeit:

$$\lim_{t \rightarrow 3} (180t) = 540$$

$$\lim_{t \rightarrow 3} \left(-630 \cdot e^{-\frac{2}{7}t + \frac{6}{7}} + 1170 \right) = 540$$

$$B(3) = 540$$

$\Rightarrow B$ ist stetig bei $t_0 = 3$

Differenzierbarkeit:

$$\dot{B}(t) = \begin{cases} 180 & \text{für } 0 < t < 3 \\ -630 \cdot e^{-\frac{2}{7}t + \frac{6}{7}} \cdot \left(-\frac{2}{7} \right) & \text{für } 3 < t < 13 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \dot{B}(t) = \begin{cases} 180 & \text{für } 0 < t < 3 \\ 180 \cdot e^{-\frac{2}{7}t + \frac{6}{7}} & \text{für } 3 < t < 13 \end{cases}$$

$$\lim_{t \rightarrow 3} (180) = 180$$

$$\lim_{t \rightarrow 3} \left(180 \cdot e^{-\frac{2}{7}t + \frac{6}{7}} \right) = 180$$

$\Rightarrow B$ ist differenzierbar bei $t_0 = 3$

10.2

Für $0 < t < 3$: $\dot{B}(t) = 180 > 0 \Rightarrow G(B)$ streng monoton steigend für $0 < t < 3$

Für $3 < t < 13$: $\dot{B}(t) = 180 \cdot e^{-\frac{2}{7}t + \frac{6}{7}} > 0$ (da $e^{-\frac{2}{7}t + \frac{6}{7}} > 0$ für alle t)

$\Rightarrow G(B)$ streng monoton steigend für $3 < t < 13$

$\Rightarrow G(B)$ ist in $[0;13]$ streng monoton steigend, weil B bei $t_0 = 3$ differenzierbar ist.

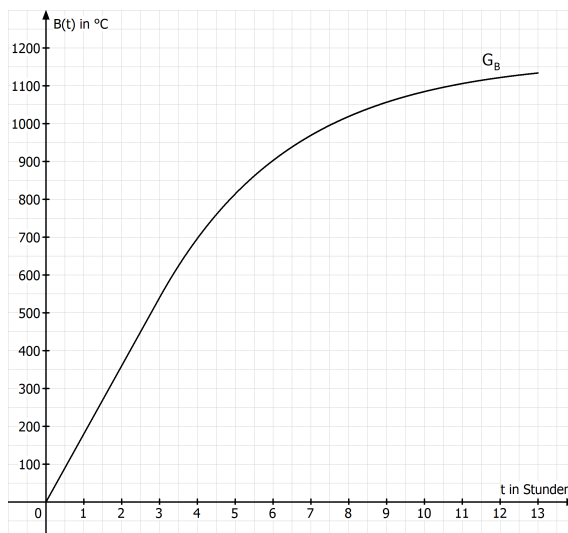
10.3

$$\begin{aligned}
 B_{\max} &= B(13) = -630 \cdot e^{-\frac{2}{7} \cdot 13 + \frac{6}{7}} + 1170 = 1133,8191^{\circ}\text{C} (\approx 1134^{\circ}\text{C}) \\
 &\Rightarrow 0,1 \cdot 1133,8191 = 113,3819 \Rightarrow 1133,8191 - 113,3819 = 1020,4372^{\circ}\text{C} \\
 &\Rightarrow -630 \cdot e^{-\frac{2}{7} \cdot t_1 + \frac{6}{7}} + 1170 = 1020,4372 \Rightarrow -630 \cdot e^{-\frac{2}{7} \cdot t_1 + \frac{6}{7}} = -149,5628 \\
 &\Rightarrow e^{-\frac{2}{7} \cdot t_1 + \frac{6}{7}} = 0,2374012 \Rightarrow -\frac{2}{7} \cdot t_1 + \frac{6}{7} = \ln(0,2374012) \\
 &\Rightarrow t_1 = \frac{\ln(0,2374012) - \frac{6}{7}}{\left(-\frac{2}{7}\right)} = 8,0330 \Rightarrow t_1 \approx 8 \text{ Std.}
 \end{aligned}$$

10.4

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{B(13) - B(8)}{13 - 8} = \frac{1133,82 - 1019,02}{5} = \frac{114,8}{5} = 22,96 \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{h}} \\
 &\Rightarrow m \text{ beschreibt die durchschnittliche Temperaturerhöhung pro Stunde} \\
 &\text{im Zeitintervall } t \in [8; 13].
 \end{aligned}$$

10.5



10.6

$$\begin{aligned}
 \text{Für } 0 < t < 3: A &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot B(3) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 540 = 810 \\
 \text{Für } 3 < t < 13: A &= \int_3^{13} \left(-630e^{-\frac{2}{7}t + \frac{6}{7}} + 1170 \right) dt = \left[-630e^{-\frac{2}{7}t + \frac{6}{7}} \cdot \left(-\frac{7}{2} \right) + 1170t \right]_3^{13} = \\
 &= \left[2205e^{-\frac{2}{7}t + \frac{6}{7}} + 1170t \right]_3^{13} \approx 15336,64 - 5715 \approx 9621,64 \\
 &\Rightarrow W = 810 + 9621,64 = 10431,64
 \end{aligned}$$

11.1

$$\begin{aligned} K(0) = 32 &\Rightarrow \frac{900}{1 + e^{-c(-15)}} = 32 \Rightarrow 900 = 32(1 + e^{15c}) \Rightarrow 1 + e^{15c} = \frac{900}{32} \\ &\Rightarrow e^{15c} = \frac{900}{32} - 1 \Rightarrow 15c = \ln\left(\frac{900}{32} - 1\right) \\ &\Rightarrow c = \frac{\ln\left(\frac{900}{32} - 1\right)}{15} = 0,22003 \approx 0,22 \end{aligned}$$

11.2

Asymptote:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{900}{1 + e^{-0,22(t-15)}} = 900$$

$\Rightarrow$ nach langer Zeit werden 900 Kaninchen auf der Insel leben;

Monotonieverhalten:

$$\dot{K}(t) = \frac{0 \cdot (1 + e^{-0,22(t-15)}) - 900 \cdot e^{-0,22(t-15)} \cdot (-0,22)}{(1 + e^{-0,22(t-15)})^2} = \frac{198 \cdot e^{-0,22(t-15)}}{(1 + e^{-0,22(t-15)})^2}$$

$\Rightarrow K(t)$ ist für alle $t > 0$ positiv, weil Zähler und Nenner positiv sind;

$\Rightarrow G(K)$ ist streng monoton steigend für $t > 0$

$\Rightarrow$ Die Kaninchenpopulation nimmt also zu, wird aber einen Grenzwert von 900 Tieren nicht überschreiten.

11.3

$$\dot{K}(11) = \frac{477,358}{11,634} = 41,031$$

$\dot{K}(t)$ beschreibt die Änderung der Kaninchenpopulation pro Zeiteinheit

$\Rightarrow$ im 11. Jahr, also 1966, nahm die Kaninchenpopulation um 41 Tiere zu.

11.4

t	13	15	17
$\dot{K}(t)$	47,18	49,5	47,18

Nach Angabe ist $G(K)$ punktsymmetrisch zum Wendepunkt. Aus der Symmetrie der

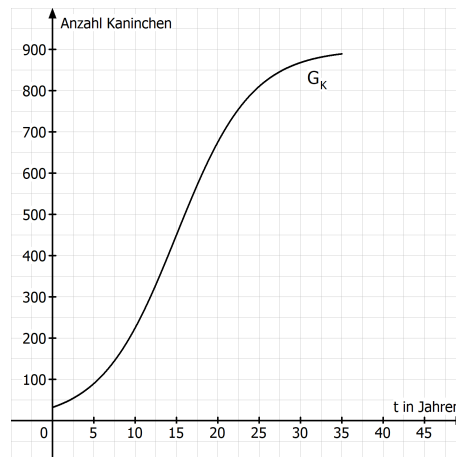
Funktionswerte $\dot{K}(t)$ zum Wert $t = 15$ folgt, dass $G(K)$ punktsymmetrisch zum Punkt $W(15; K(15))$ ist. $K(15) = 450$

Bedeutung des Wendepunktes:

Im 15. Jahr, also 1970, ist der jährliche Zuwachs der Kaninchenpopulation am größten.

11.5

t	0	5	10	15	25	35
K(t)	32	89,7	224,7	450	810,2	889,1



12.1 A) Da die Einwohnerzahl steigt, müsste die 1. Ableitung stets positiv sein.

B) Da das Wachstum der Einwohnerzahl abnehmend ist, müsste der Graph rechtsgekrümmt sein.

$$m_1 = \frac{N(2001) - N(2000)}{2001 - 2000} = \frac{15631 - 15446}{2001 - 2000} = 185$$

$$C) m_2 = \frac{N(2005) - N(2004)}{2005 - 2004} = \frac{16286 - 16127}{2005 - 2004} = 159$$

⇒ wegen der unterschiedlichen Steigungen, kann es keine lineare Funktion sein;

12.2

$$(I) N(5) = 15446 \Rightarrow 15446 = 20000 - a \cdot e^{-5k} \Rightarrow a \cdot e^{-5k} = 4554$$

$$(II) N(10) = 16286 \Rightarrow 16286 = 20000 - a \cdot e^{-10k} \Rightarrow a \cdot e^{-10k} = 3714$$

$$(I) \Rightarrow a = 4554 \cdot e^{5k}$$

$$(II) \Rightarrow a = 3714 \cdot e^{10k}$$

$$\Rightarrow 4554 \cdot e^{5k} = 3714 \cdot e^{10k} \Rightarrow \frac{e^{10k}}{e^{5k}} = \frac{4554}{3714} \Rightarrow e^{5k} = 1,22617 \Rightarrow 5k = \ln(1,22617)$$

$$\Rightarrow k = \frac{\ln 1,22617}{5} = 0,04078$$

$$\Rightarrow a = 4554 \cdot e^{5 \cdot 0,04078} = 5584$$

12.3

$$2003: N(8) = 15970$$

$$2030: N(35) = 18660$$

12.4 Es gilt: $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = C = 20000$

C gibt daher die Obergrenze der Einwohnerzahl für $t \rightarrow \infty$ in diesem Modell an.

12.5

$$\bullet \quad N(t) = -5584 \cdot e^{-0,04078t} \cdot (-0,04078) = 227,7 \cdot e^{-0,04078t}$$

$$\bullet \quad N(14) = 129$$

Dieser Wert bedeutet, dass die Zuwachsrate am 1.1.2009 129 Personen pro Jahr beträgt.

12.6

$$N(t_0) = 19000$$

$$20000 - 5584 \cdot e^{-0,04078t_0} = 19000 \Rightarrow 5584 \cdot e^{-0,04078t_0} = 1000 \Rightarrow e^{-0,04078t_0} = \frac{1000}{5584}$$

$$\Rightarrow -0,04078 \cdot t_0 = \ln\left(\frac{1000}{5584}\right) \Rightarrow t_0 = \frac{\ln\left(\frac{1000}{5584}\right)}{-0,04078} \approx 42,175$$

$\Rightarrow$ Die Zahl von 19000 Einwohner wird voraussichtlich im Jahr 2037 überschritten;

13.1

$$(I) \quad s_1(0) = 398 \Rightarrow c \cdot e^0 = 398 \Rightarrow c = 398$$

$$(II) \quad s_1(16) = 562 \Rightarrow c \cdot e^{16k} = 562$$

$$\Rightarrow 398 \cdot e^{16k} = 562 \Rightarrow e^{16k} = \frac{562}{398} \Rightarrow 16k = \ln\left(\frac{562}{398}\right) \Rightarrow k = \frac{\ln\left(\frac{562}{398}\right)}{16} = 0,0216$$

13.2

$$s_1(t_1) = 1,5 \cdot 398$$

$$\Rightarrow 1,5 \cdot 398 = 398 \cdot e^{0,0216t_1} \Rightarrow e^{0,0216t_1} = 1,5 \Rightarrow 0,0216 \cdot t_1 = \ln(1,5)$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{\ln(1,5)}{0,0216} = 18,8$$

$\Rightarrow$ Im Jahr 1989 wäre nach diesem Modell die Emission gegenüber 1970 um 50 % erhöht gewesen.

13.3

$$\int_0^{21} s_1(t) dt = \int_0^{21} (398 \cdot e^{0,0216t}) dt = \left[398 \cdot e^{0,0216t} \cdot \frac{1}{0,0216} \right]_0^{21} =$$

$$= \frac{398}{0,0216} \cdot (e^{0,0216 \cdot 21} - e^0) \approx 10576 \text{ [ME]}$$

⇒ Die Gesamtemission des Schadstoffes von Anfang 1971 bis einschließlich 1991 beträgt nach diesem Modell 10576 Mengeneinheiten.

13.4.1

$$\lim_{t \rightarrow 21^-} s(t) = \lim_{t \rightarrow 21^-} (398 \cdot e^{0,0216t}) \approx 626$$

$$\lim_{t \rightarrow 21^+} s(t) = \lim_{t \rightarrow 21^+} (1200 - 941 \cdot e^{-0,0235t}) \approx 626$$

$$s(21) = 398 \cdot e^{0,0216 \cdot 21} \approx 626$$

⇒ die Funktion s ist an der Stelle $t_0 = 21$ stetig;

13.4.2

Nachweis der Zunahme:

$$\bullet \quad s_2(t) = -941 \cdot e^{-0,0235t} \cdot (-0,0235) = 22,1 \cdot e^{-0,0235t} > 0$$

⇒ Die Schadstoffemission steigt weiter

Nachweis, dass die Zunahme geringer wird:

$$\bullet \bullet \quad s_2(t) = 22,1 \cdot e^{-0,0235t} \cdot (-0,0235) = -0,5 \cdot e^{-0,0235t} < 0$$

⇒ Die Zunahme der Schadstoffemission wird geringer

13.4.3

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (1200 - 941 \cdot e^{-0,0235t}) = 1200$$

⇒ Die Emission soll nach längerer Zeit bei 1200 Mengeneinheiten pro Jahr liegen

$$s(37) = 1200 - 941 \cdot e^{-0,0235 \cdot 37} \approx 806$$

Reale Emission: 753

Damit ist die Schadstoffemission geringer als erwartet.

14.1

$$B(t) = (at + b)e^{-0,15t} + 70$$

$$\dot{B}(t) = a \cdot e^{-0,15t} + (at + b)e^{-0,15t} \cdot (-0,15) = e^{-0,15t} (a - 0,15b - 0,15at)$$

$$(I) \quad B(7) = 35 \Rightarrow 7a + b = -\frac{35}{e^{-1,05}}$$

$$(II) \quad \dot{B}(7) = 0$$

$$\Rightarrow e^{-1,05} \cdot (a - 0,15b - 1,05a) = 0$$

$$\Rightarrow -0,05a - 0,15b = 0 \quad (\text{da } e^{-1,05} \text{ immer positiv ist})$$

$$(I) \Rightarrow b = -\frac{35}{e^{-1,05}} - 7a$$

$$b \text{ in (II): } -0,05a - 0,15 \left(-\frac{35}{e^{-1,05}} - 7a \right) = 0 \Rightarrow -0,05a + \frac{5,25}{e^{-1,05}} + 1,05a = 0$$

$$\Rightarrow a = -\frac{5,25}{e^{-1,05}} \approx -15,00$$

$$\Rightarrow b = \frac{35}{e^{-1,05}} - 7(-15) \approx 4,98$$

14.2

$$B(t) = (-15t + 5)e^{-0,15t} + 70$$

$$B(0) = (-15 \cdot 0 + 5)e^{-0,15 \cdot 0} + 70 = 75$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [(-15t + 5)e^{-0,15t} + 70] = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{-15t + 5}{e^{0,15t}} + 70 \right] = 70$$

(da e-Fkt. stärker als Potenzfunktion)

Nach sehr langer Zeit stellt sich ein Bestand von 70 Millionen Fischen ein.

14.3

$$B(16,5) = (-15 \cdot 16,5 + 5)e^{-0,15 \cdot 16,5} + 70 \approx 49,59$$

$$B(t) = (-15t + 5)e^{-0,15t} + 70$$

$$\begin{aligned} \dot{B}(t) &= -15 \cdot e^{-0,15t} + (-15t + 5) \cdot e^{-0,15t} \cdot (-0,15) = \\ &= e^{-0,15t} \cdot (-15 + 2,25t - 0,75) = e^{-0,15t} \cdot (2,25t - 15,75) \end{aligned}$$

$$\dot{B}(16,5) = e^{-0,15 \cdot 16,5} \cdot (2,25 \cdot 16,5 - 15,75) \approx 1,80$$

Die jährliche Zunahmerate am 01.07.2011 beträgt 1,80 Millionen Fische pro Jahr

14.4

$$\ddot{B}(t) = e^{-0,15t} \cdot (-0,15) \cdot (2,25t - 15,75) + e^{-0,15t} \cdot 2,25 = e^{-0,15t} \cdot (-0,3375t + 4,6125)$$

$$\ddot{B}(t) = 0 \Rightarrow e^{-0,15t} \cdot (-0,3375t + 4,6125) = 0 \Rightarrow -0,3375t + 4,6125 = 0 \Rightarrow t = 13\frac{2}{3}$$

Skizze von $\ddot{B}$: $e^{-0,15t}$ immer positiv

Skizze von $(-0,3375t + 4,6125)$:

$\Rightarrow 0 \leq t < 13\frac{2}{3}$: Bestandszunahme nimmt zu

$t > 13\frac{2}{3}$: Bestandszunahme nimmt ab

$\Rightarrow t = 13\frac{2}{3}$ ist Zeitpunkt der größten Bestandszunahme

$\Rightarrow$ absolutes Maximum, weil einziger VZW

$\Rightarrow$ die größte Bestandszunahme war im Jahr 2008

15.1

$$4 = 5(1 - e^{-8k}) \Rightarrow 1 - e^{-8k} = \frac{4}{5} \Rightarrow e^{-8k} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow -8k = \ln \frac{1}{5} \Rightarrow k = \frac{\ln \frac{1}{5}}{-8} \approx 0,2$$

15.2

$$2 = 5(1 - e^{-0,2t}) \Rightarrow 1 - e^{-0,2t} = \frac{2}{5} \Rightarrow e^{-0,2t} = 0,6$$

$$\Rightarrow -0,2t = \ln 0,6 \Rightarrow t = \frac{\ln 0,6}{-0,2} \approx 2,6$$

Der Wasserstand in Behälter II war nach ca. 2,6 Sekunden auf 2 cm angestiegen.

15.3.1

$$\dot{A}_2(t) = e^{-0,2t} - 0,1$$

$$\Rightarrow e^{-0,2t} - 0,1 = 0 \Rightarrow e^{-0,2t} = 0,1 \Rightarrow -0,2t = \ln 0,1 \Rightarrow t = \frac{\ln 0,1}{-0,2} \approx 11,5$$

Skizze von $\dot{A}_2$:

$\Rightarrow t = 11,5$ ist HP

$\Rightarrow$ da A_2 nur ein Extremum (Maximum) hat, tritt in diesem Bereich keine weitere

Änderung des Monotonieverhaltens auf $\Rightarrow$ absolutes Maximum für $t = 11,5$

$$A_2(11,5) \approx 3,3$$

In Behälter II wird maximal ein Wasserstand von 3,3 cm erreicht.

15.3.2

Asymptote: $y = 5 - 0,1t$

$$5 - 0,1t = 0 \Rightarrow t = 50$$

Der Behälter II ist nach 50 Sekunden nahezu leer

16.1

$$(I) A(0) = 2,00 \Rightarrow \frac{100}{8+b} = 2,00 \Rightarrow 100 = 16 + 2b \Rightarrow b = 42$$

$$(II) A(20) = 8,46 \Rightarrow \frac{100}{8+b \cdot e^{20c}} = 8,46 \Rightarrow 100 = 8,46 \cdot (8 + 42e^{20c})$$

$$\Rightarrow 42e^{20c} = 3,82 \Rightarrow 20c = \ln(0,091) \Rightarrow c = -0,12$$

16.2

$$A(40) = \frac{100}{8 + 42e^{-0,12 \cdot 40}} \approx 11,98$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{100}{8 + 42e^{-0,12t}} \right) = \frac{100}{8} = 12,5$$

Nach 40 Tagen beträgt der Alkoholgehalt 11,98 % und nach sehr langer Zeit 12,5 %.

16.3

$$\frac{100}{8 + 42e^{-0,12t}} \leq 10 \Rightarrow 8 + 42e^{-0,12t} \geq 10 \Rightarrow 42e^{-0,12t} \geq 2 \Rightarrow e^{-0,12t} \geq \frac{1}{21}$$

$$\Rightarrow -0,12t \geq \ln\left(\frac{1}{21}\right) \Rightarrow t \leq \frac{\ln\left(\frac{1}{21}\right)}{-0,12} \approx 25,37$$

Der Federweißer kann bis zum 25. Tag ausgeschenkt werden.

16.4

$$A(t) = \frac{0 \cdot (8 + 42e^{-0,12t}) - 100 \cdot 42e^{-0,12t} \cdot (-0,12)}{(8 + 42e^{-0,12t})^2} = \frac{504e^{-0,12t}}{(8 + 42e^{-0,12t})^2}$$

$A(t) > 0$ für alle $t \geq 0$ (da Zähler und Nenner immer positiv sind)

$\Rightarrow$ der Alkoholgehalt des Weins nimmt ständig zu

16.5

Bis zum 14. Tag ist die tägliche Zunahme des Alkoholgehaltes wachsend, danach abnehmend.

$H(14/0,375)$

Die größte Zunahme des Alkoholgehaltes ist am 14. Tag und beträgt 0,375 % pro Tag.

17.1

$$W_{\frac{1}{60}}(5) = 1 - e^{-\frac{1}{60} \cdot 5} \approx 0,08 \hat{=} 8\%$$

$$W_{\frac{1}{12}}(5) = 1 - e^{-\frac{1}{12} \cdot 5} \approx 0,3408 \hat{=} 34,08\%$$

$$W_{\frac{1}{6}}(5) = 1 - e^{-\frac{1}{6} \cdot 5} \approx 0,5654 \hat{=} 56,54\%$$

Je größer k ist, desto größer ist die Wahrscheinlichkeit höchstens t Minuten auf eine freie Leitung warten zu müssen.

17.2

$$W_k(10) = 0,95 \Rightarrow 1 - e^{-k \cdot 10} = 0,95 \Rightarrow e^{-10k} = 0,05$$

$$\Rightarrow -10k = \ln(0,05) \Rightarrow k = \frac{\ln(0,05)}{-10} \approx 0,3 \left[\frac{1}{\text{min}} \right]$$

17.3

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (1 - e^{-kt}) = 1$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass man nach sehr langer Zeit auf eine freie Leitung durchgestellt wird, beträgt 100 %.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (1 - e^{-kt}) = 1$$

Bei sehr großen k Werten ist die Wahrscheinlichkeit, auf eine freie Leitung durchgestellt zu werden, 100 %.

Für sehr große k Werte hat man praktisch keine Wartezeit.

17.4

$$\dot{G}(t) = -e^{-0,1t} \cdot (-0,1) \cdot (t+10) + (-e^{-0,1t}) \cdot 1 = e^{-0,1t} (0,1(t+10) - 1) = 0,1t \cdot e^{-0,1t}$$

$$W_{0,1}(t) = 1 - e^{-0,1t} \Rightarrow \dot{W}_{0,1}(t) = -e^{-0,1t} \cdot (-0,1) = 0,1e^{-0,1t}$$

$$\Rightarrow \dot{G}(t) = t \cdot \dot{W}_{0,1}(t) \Rightarrow G \text{ ist eine Stammfunktion von } t \cdot \dot{W}_{0,1}(t)$$

$$\bar{T} = \int_0^{\infty} t \cdot \dot{W}_{0,1}(t) dt \Rightarrow \left[-e^{-0,1t} \cdot (t+10) \right]_0^a = -e^{-0,1a} (a+10) - (-10) = 10 - e^{-0,1a} (a+10)$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} (10 - e^{-0,1a} (a+10)) = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(10 - \frac{a+10}{e^{0,1a}} \right) = 10 [\text{min}]$$

(weil e-Funktion stärker als Potenzfunktion)

$$W_{0,1}(10) = 1 - e^{-0,1 \cdot 10} = 1 - e^{-1} \approx 0,6321 \hat{=} 63,21\%$$

18.1

$$27 = 0,25 \cdot 13^2 \cdot e^{-a \cdot 13} + 5 \Rightarrow 22 = 42,25 \cdot e^{-13a} \Rightarrow e^{-13a} = \frac{88}{169}$$

$$\Rightarrow a = -\frac{\ln\left(\frac{88}{169}\right)}{-13} \approx 0,05$$

18.2

$$z(0) = 0,25 \cdot 0^2 \cdot e^{-0,05 \cdot 0} + 5 = 5 \text{ Fahrzeuge pro Minute}$$

$$z(90) = 0,25 \cdot 90^2 \cdot e^{-0,05 \cdot 90} + 5 \approx 27,5 \text{ Fahrzeuge pro Minute}$$

18.3

$$\dot{z}(t) = 0,5t \cdot e^{-0,05t} + 0,25t^2 \cdot e^{-0,05t} \cdot (-0,05) = t \cdot e^{-0,05t} \cdot (0,5 - 0,0125t)$$

$$\dot{z}(t) = 0 \Rightarrow t_1 = 0 \quad 0,5 - 0,0125t = 0 \Rightarrow t_2 = 40$$

Skizze von $z: e^{-0,05t}$ immer positiv

Skizze von $(0,5t - 0,0125t^2)$:

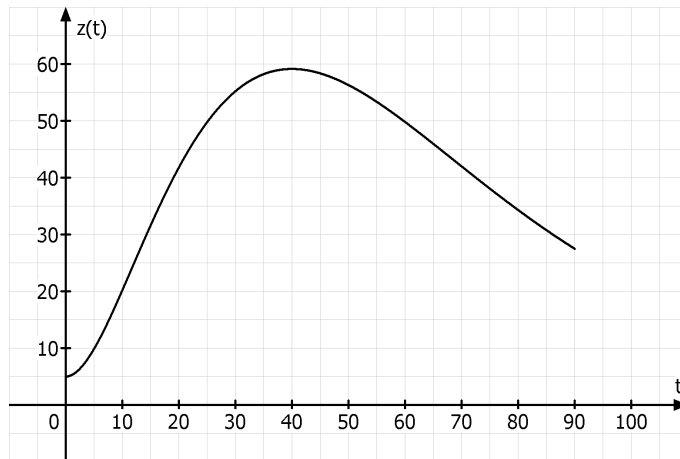
$\Rightarrow$ Maximum bei $t = 40$

$\Rightarrow$ absolutes Maximum bei $t = 40$, weil einziger Monotoniewechsel
im Definitionsbereich

$$z(40) = 0,25 \cdot 40^2 \cdot e^{-0,05 \cdot 40} + 5 \approx 59,13$$

Die Verkehrsdichte ist um 7:40 Uhr mit etwa 59 Fahrzeugen pro Minute
am größten.

18.4



18.5

$$\begin{aligned} \dot{Z}(t) &= -0,25e^{-0,05t} \cdot (-0,05) \cdot (20t^2 + 800t + 16000) + \left[-0,25e^{-0,05t} \cdot (40t + 800) \right] + 5 = \\ &= 0,0125e^{-0,05t} \cdot (20t^2 + 800t + 16000) - 0,25e^{-0,05t} \cdot (40t + 800) + 5 = \\ &= 0,25e^{-0,05t} \cdot (t^2 + 40t + 800 - 40t - 800) + 5 = \\ &= 0,25e^{-0,05t} \cdot t^2 + 5 = z(t) \end{aligned}$$

$\Rightarrow Z$ ist Stammfunktion von z ;

$$\begin{aligned} \int_0^{60} z(t) dt &= \left[-0,25e^{-0,05t} \cdot (20t^2 + 800t + 16000) + 5t \right]_0^{60} = \\ &= -0,25e^{-0,05 \cdot 60} \cdot (20 \cdot 60^2 + 800 \cdot 60 + 16000) + 5 \cdot 60 - (-0,25 \cdot 16000) \approx \\ &\approx -1392,76 + 4000 \approx 2607,24 \end{aligned}$$

In den ersten 60 Minuten haben etwa 2607 Fahrzeuge die Kreuzung passiert.

19.1

$$(I) \quad 74 = 18 + a \cdot e^{-2c}$$

$$(II) \quad 28 = 18 + a \cdot e^{-25c}$$

$$(I) \Rightarrow a = 56 \cdot e^{2c}$$

$$(II) \Rightarrow 28 = 18 + 56 \cdot e^{2c} \cdot e^{-25c} \Rightarrow \frac{10}{56} = e^{-23c} \Rightarrow c = \frac{\ln \frac{10}{56}}{-23} \approx 0,075$$

$$\Rightarrow a = 56 \cdot e^{2 \cdot 0,075} \approx 65,06$$

19.2

$$T(0) = 18 + 65 \cdot e^{-0,075 \cdot 0} = 83^\circ\text{C}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [18 + 65 \cdot e^{-0,075t}] = 18^\circ\text{C}$$

Langfristig wird sich der Tee auf die Umgebungstemperatur von 18°C abkühlen.

19.3

$$\dot{T}(t) = 65 \cdot e^{-0,075t} \cdot (-0,075) = -4,875 \cdot e^{-0,075t}$$

$$\dot{T}(3) \approx -3,89 \quad \dot{T}(25) \approx -0,75$$

Nach drei Minuten beträgt die Abnahme der Temperatur 3,89°C/min und nach 25 Minuten nur noch 0,75°C/min.

19.4

$$18 + 65 \cdot e^{-0,075t} < 19 \Rightarrow 65 \cdot e^{-0,075t} < 1 \Rightarrow e^{-0,075t} < \frac{1}{65}$$

$$\Rightarrow -0,075t < \ln \frac{1}{65} \Rightarrow t > \frac{\ln \frac{1}{65}}{-0,075} \approx 56 \text{ Minuten}$$

Um 7:56 Uhr ist der Abkühlvorgang abgeschlossen.

20.1

$$L(v) = (0,02v - 0,25) \cdot e^{av} + b$$

$$L(0) = -0,25 \cdot e^0 + b = 0,95 \Rightarrow b = 1,20$$

$$L(7) = -0,11 \cdot e^{7a} + b = 0,65 \Rightarrow -0,11 \cdot e^{7a} = -0,55$$

$$\Rightarrow e^{7a} = 5 \Rightarrow 7a = \ln 5 \Rightarrow a = \frac{\ln 5}{7} \approx 0,23$$

20.2

$$L(v) = (0,02v - 0,25) \cdot e^{0,23v} + 1,20$$

$$L'(v) = 0,02 \cdot e^{0,23v} + (0,02v - 0,25) \cdot e^{0,23v} \cdot 0,23$$

$$= e^{0,23v} (0,02 + 0,0046v - 0,0575) = e^{0,23v} (0,0046v - 0,0375)$$

$$L'(v) = 0 \Rightarrow e^{0,23v} (0,0046v - 0,0375) = 0 \Rightarrow 0,0046v - 0,0375 = 0 \Rightarrow v \approx 8,15$$

Skizze von L' : $e^{0,23v}$ immer positiv

Skizze von $(0,0046v - 0,0375)$:

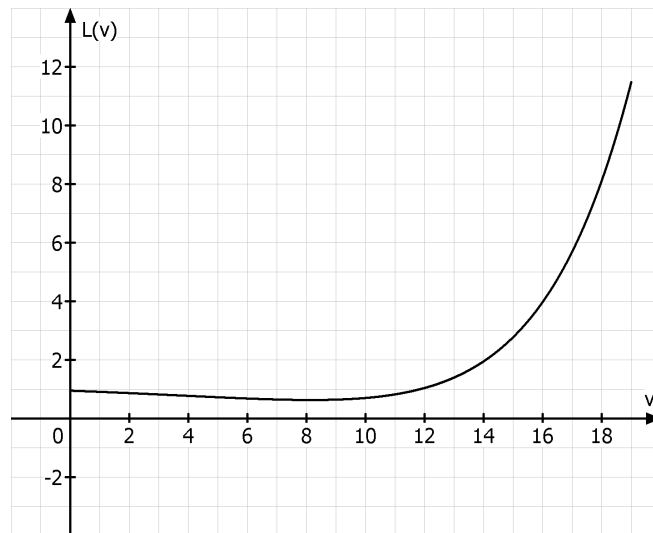
$$\Rightarrow \text{Minimum für } v \approx 8,15 \Rightarrow \text{Min}(8,15 / 0,63)$$

$\Rightarrow$ Bei einer Geschwindigkeit von 8,15 km/h liegt die niedrigste

Laktatkonzentration im Blut von 0,63 mmol/l vor;

$\Rightarrow$ Die Laktatkonzentration nimmt bis 8,15 km/h ab und danach zu;

20.3



20.4

$$a) N(v) = e^{0,5v-7} + 1 \Rightarrow N'(v) = e^{0,5v-7} \cdot 0,5$$

$$e^{0,5v-7} \cdot 0,5 = 1 \Rightarrow e^{0,5v-7} = 2 \Rightarrow 0,5v - 7 = \ln 2 \Rightarrow v = \frac{\ln 2 + 7}{0,5} \approx 15,39 \text{ km/h}$$

b) aus der Zeichnung: $v \approx 16 \text{ km/h}$

Die Geschwindigkeiten unterscheiden sich nur geringfügig, also führen beide Modelle zu ähnlichen Werten.

21.1

$$(I) g(0) = 108 \Rightarrow a \cdot b^0 = 108 \Rightarrow a = 108$$

$$(II) g(10) = 220 \Rightarrow (a - 2,7 \cdot 10) \cdot e^{10b} = 220 \Rightarrow 81 \cdot e^{10b} = 220$$

$$\Rightarrow e^{10b} = \frac{220}{81} \Rightarrow 10b = \ln\left(\frac{220}{81}\right) \Rightarrow b = \frac{\ln\left(\frac{220}{81}\right)}{10} \approx 0,1$$

a beschreibt die zu Beginn geförderte Rate in Millionen m^3 pro Jahr

21.2

$$g(t) = 0 \Rightarrow 108 - 2,7t = 0 \text{ (weil } e^{0,1t} \text{ immer positiv)} \Rightarrow t = 40$$

Im Jahr 2052 wird das Erdgasfeld vollständig abgebaut sein.

21.3

$$\begin{aligned} \bullet \\ g(t) &= -2,7 \cdot e^{0,1t} + (108 - 2,7t) \cdot e^{0,1t} \cdot 0,1 = \\ &= e^{0,1t} \cdot (-2,7 + 10,8 - 0,27t) = e^{0,1t} \cdot (8,1 - 0,27t) \\ \bullet \\ g(t) &= 0 \Rightarrow 8,1 - 0,27t = 0 \quad (\text{weil } e^{0,1t} \text{ immer positiv}) \Rightarrow t = 30 \end{aligned}$$

•
Skizze von g : $e^{0,1t}$ immer positiv

Skizze von $(8,1 - 0,27t)$:

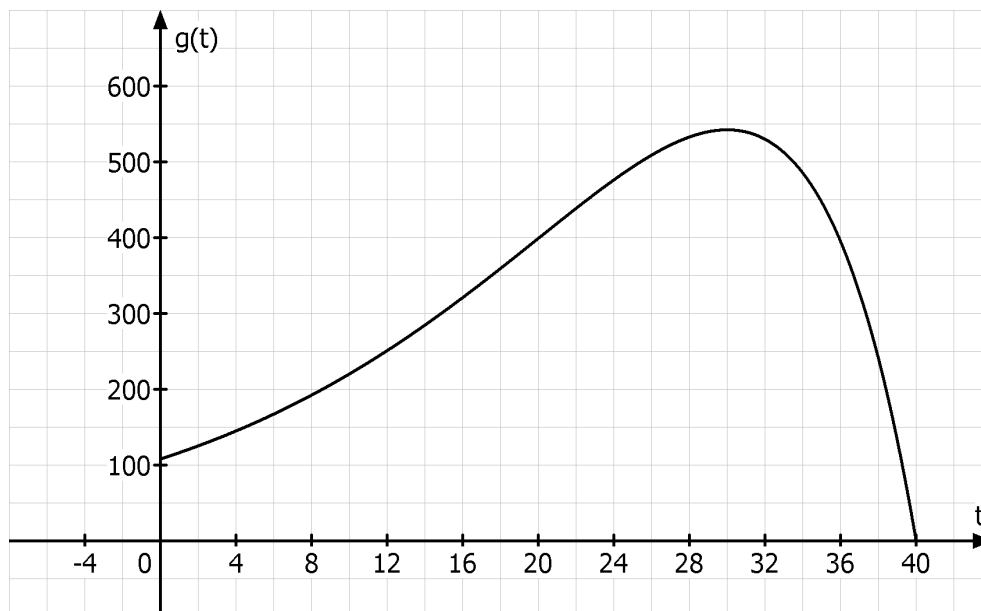
$\Rightarrow$ Maximum für $t = 30$

$\Rightarrow$ da g nur ein Extremum (Maximum) besitzt, tritt keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf $\Rightarrow$ absolutes Maximum für $t = 30$

$$g(30) \approx 542,309$$

Im Jahr 2042 liegt die größte Förderrate mit 542,309 Millionen m^3 pro Jahr vor.

21.4



21.5

$$\begin{aligned} \bullet \\ G(t) &= -27 \cdot e^{0,1t} + (1350 - 27t) \cdot e^{0,1t} \cdot 0,1 = e^{0,1t} (-27 + 135 - 2,7t) = \\ &= e^{0,1t} (108 - 2,7t) = g(t) \end{aligned}$$

$\Rightarrow G$ Stammfunktion von g

$$\int_0^{40} g(t) dt = \left[(1350 - 27t) \cdot e^{0,1t} \right]_0^{40} = 270e^4 - 1350 \approx 13391,50051$$

In 40 Jahren sollten insgesamt 13392 Millionen m^3 gefördert werden.

22.1

$$m(1) = 4,88$$

$$100(1 - e^{-a}) = 4,88 \Rightarrow 1 - e^{-a} = 0,0488 \Rightarrow e^{-a} = 0,9512 \Rightarrow a = -\ln(0,9512) \approx 0,05$$

22.2

$$m(10) = 100(1 - e^{-0,05}) \approx 39,35 \text{ [mg]}$$

$$100(1 - e^{-0,05t}) = 70 \Rightarrow 1 - e^{-0,05t} = 0,7 \Rightarrow e^{-0,05t} = 0,3$$

$$\Rightarrow -0,05t = \ln(0,3) \Rightarrow t = -20 \ln(0,3) \approx 24 \text{ [min]}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [100(1 - e^{-0,05t})] = 100$$

Langfristig werden 100 mg im Blut des Patienten vorhanden sein.

22.3

$$\dot{m}(t) = 100(-e^{-0,05t} \cdot (-0,05)) = 5e^{-0,05t}$$

$$\dot{m}(10) = 5e^{-0,5} \approx 3,03 \quad \dot{m}(30) \approx 5e^{-1,5} \approx 1,12$$

Nach 10 Minuten nimmt die Menge des Medikaments im Blut des Patienten um 3,03 mg/min zu, nach 30 Minuten um 1,12 mg/min.

22.4.1

$$\dot{m}(0) = 5e^{-0,05 \cdot 0} = 5$$

Dem Patienten werden 5 mg pro Minute zugeführt.

22.4.2

$$1000 - 5x = 0 \Rightarrow x = 200 \text{ [min]}$$

Die Flasche ist um 11.20 Uhr leer.

$$m(200) = 100(1 - e^{-10}) \approx 99,995 \text{ mg}$$

Nach 200 Minuten befinden sich praktisch 100 mg des Medikaments im Blut des Patienten, so dass der Abbau des Medikaments dann nach der Funktion $r(t) = m(200) \cdot e^{-0,05t} = 100e^{-0,05t}$ erfolgt.

$$100e^{-0,05t} < 70 \Rightarrow e^{-0,05t} < 0,7 \Rightarrow -0,05t < \ln(0,7) \Rightarrow t > \frac{\ln(0,7)}{-0,05} (\approx 7,13)$$

Die Pflegekraft muss die Infusion um ca. 11.27 Uhr wechseln.

23.1

$$(I) B(5) = 120 \Rightarrow \frac{A}{1 + 849e^{5c}} = 120$$

$$(II) B(0) = 1 \Rightarrow \frac{A}{1 + 849e^0} = 1 \Rightarrow A = 1 + 849 = 850$$

$$(I) \Rightarrow \frac{850}{1 + 849e^{5c}} = 120 \Rightarrow 1 + 849e^{5c} = \frac{850}{120} \Rightarrow 849e^{5c} = \frac{73}{12}$$

$$\Rightarrow e^{5c} = \frac{73}{10188} \Rightarrow 5c = \ln\left(\frac{73}{10188}\right) \Rightarrow c = \frac{\ln\left(\frac{73}{10188}\right)}{5} \approx -0,988$$

23.2

$$B(t) = 500 \Rightarrow \frac{850}{1 + 849 \cdot e^{-0,988t}} = 500 \Rightarrow 1 + 849 \cdot e^{-0,988t} = \frac{850}{500} = 1,7$$

$$\Rightarrow 849 \cdot e^{-0,988t} = 0,7 \Rightarrow e^{-0,988t} = \frac{7}{8490} \Rightarrow -0,988t = \ln\left(\frac{7}{8490}\right)$$

$$\Rightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{7}{8490}\right)}{-0,988} \Rightarrow t \approx 7,187$$

Nach gut sieben Tagen haben 500 Bewohner von dem Gerücht gehört.

23.3

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{850}{1 + 849 \cdot e^{-0,988t}} \right) = 850$$

Höchstens 850 Bewohner hören vom Gerücht.

(Das Dorf hat nur 850 Bewohner)

23.4

$$\dot{B}(t) = \frac{0 \cdot (1 + 849 \cdot e^{-0,988t}) - 850 \cdot 849 \cdot e^{-0,988t} \cdot (-0,988)}{(1 + 849 \cdot e^{-0,988t})^2} = \frac{712990,2 \cdot e^{-0,988t}}{(1 + 849 \cdot e^{-0,988t})^2}$$

$$\dot{B}(t) = 0 \Rightarrow 712990,2 \cdot e^{-0,988t} = 0 \quad (f)$$

Skizze von $\dot{B}$:

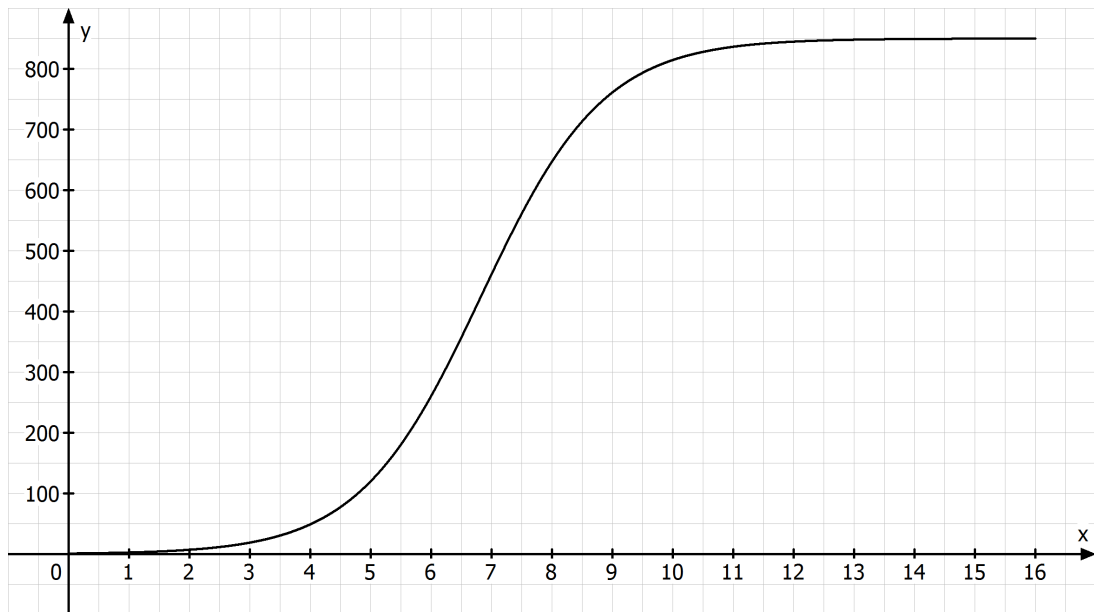
Nenner immer positiv; Zähler immer positiv

$$\Rightarrow G_B \text{ sms in } [0; \infty[$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{B}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{712990,2 \cdot e^{-0,988t}}{(1 + 849 \cdot e^{-0,988t})^2} \right) = 0$$

Auf lange Sicht nimmt die Zahl derer, die das Gerücht kennen, nicht mehr zu.

23.5



24.1

$$h(0) = 70 + 30 \cdot \ln(2) \approx 90,8$$

$$h(240) = 70 + 30 \cdot \ln(722) \approx 267,5$$

Anfangs haben die Bäume eine Höhe von ca. 90,8 cm, zum Ende ca. 267,5 cm.

24.2

$$70 + 30 \cdot \ln(3t+2) = 250 \Rightarrow 30 \cdot \ln(3t+2) = 180$$

$$\Rightarrow \ln(3t+2) = 6 \Rightarrow 3t+2 = e^6 \Rightarrow t = \frac{e^6 - 2}{3} \approx 133,8$$

Ein Murenabgang kann erstmals nach ca. $133,8:12 \approx 11,15$ Jahren verhindert werden.

24.3

$$\dot{h}(t) = 30 \cdot \frac{1}{3t+2} \cdot 3 = \frac{90}{3t+2}$$

$$\ddot{h}(t) = \frac{0 \cdot (3t+2) - 90 \cdot 3}{(3t+2)^2} = \frac{-270}{(3t+2)^2}$$

$\ddot{h}(t)$ immer negativ, d.h die Wachstumsrate nimmt immer weiter ab
 $\Rightarrow$ maximale Wachstumsrate für $t = 0$

$$25.1 \quad I(1) = 779 \Rightarrow 1000 \cdot 1^2 \cdot e^a = 779 \Rightarrow e^a = \frac{779}{1000} \Rightarrow a = \ln\left(\frac{779}{1000}\right) \approx -0,250$$

25.2

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (1000 \cdot t^2 \cdot e^{-0,250t}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1000t^2}{e^{0,250t}} \right) = 0$$

Auf lange Sicht geht die Anzahl der Computer, die sich pro Tag neu infizieren, gegen Null.

25.3

$$\dot{I}(t) = 1000 \cdot (2t \cdot e^{-0,250t} + t^2 \cdot e^{-0,250t} \cdot (-0,250)) = 1000t \cdot e^{-0,250t} (2 - 0,250t)$$

$$\dot{I}(t) = 0 \Rightarrow 1000t \cdot e^{-0,250t} (2 - 0,250t) = 0 \Rightarrow t_1 = 0 \quad t_2 = 8$$

Skizze von $\dot{I}$: $250 \cdot e^{-0,250t}$ immer positiv

Skizze von $(8t - t^2)$:

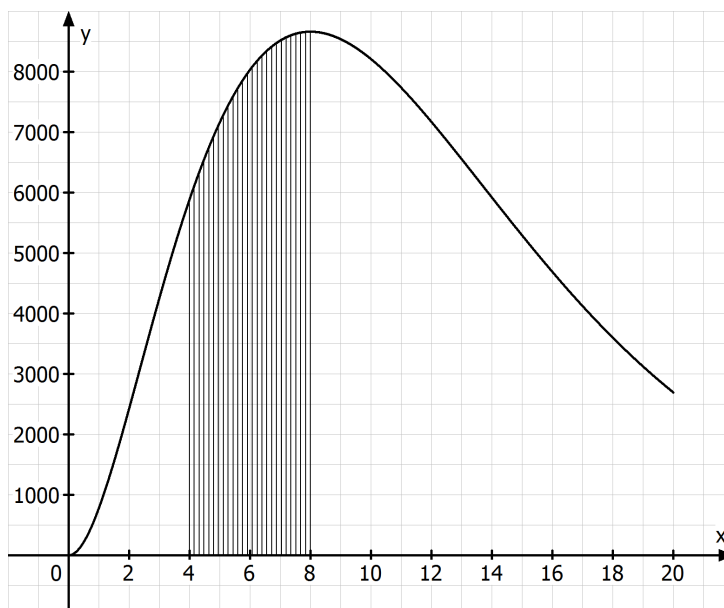
$\Rightarrow$ Infizierungsrate nimmt zu für $t \in [0; 8]$

$\Rightarrow$ Infizierungsrate nimmt ab für $t \in [8; \infty[$

$\Rightarrow$ Maximale Infizierungsrate für $t = 8$

$$I(8) = 1000 \cdot 8^2 \cdot e^{-0,250 \cdot 8} \approx 8661 \text{ Computer pro Tag}$$

25.4



25.5

Abschätzung durch ein Trapez:

$$A = \frac{l(4) + l(8)}{2} \cdot 4 \approx 29094$$

Etwa 29094 Computer infizieren sich zwischen den Zeitpunkten

4 Tage und 8 Tage neu.

$$26.1 \quad n(4) = 20,983 \Rightarrow b \cdot (-e^{-0,2} + e^{-1} + 1,5) = 20,983 \Rightarrow b = \frac{20,983}{(-e^{-0,2} + e^{-1} + 1,5)} \approx 20$$

26.2

$$\bullet \quad n(t) = 20 \cdot (-e^{-0,05t} \cdot (-0,05) + e^{-0,25t} \cdot (-0,25)) = e^{-0,05t} - 5e^{-0,25t}$$

$$\bullet \quad n(t) = 0 \Rightarrow e^{-0,05t} - 5e^{-0,25t} = 0 \Rightarrow e^{-0,05t} (1 - 5e^{-0,2t}) = 0$$

$$\Rightarrow 1 - 5e^{-0,2t} = 0 \Rightarrow t = \frac{\ln 0,2}{-0,2} \approx 8,05$$

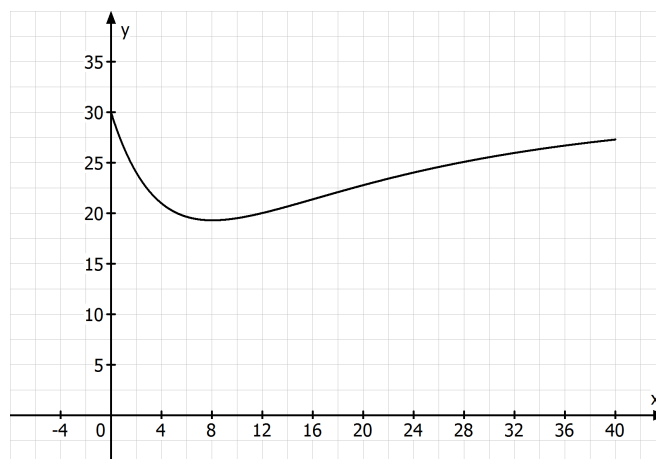
• Skizze von n : $e^{-0,05t}$ immer positiv

Skizze von $(1 - 5e^{-0,2t})$:

$$\Rightarrow t = 8,05 \text{ Minimum} \Rightarrow \text{Min}(8,03/19,3)$$

Zu Beginn des Jahres 2003 hat die Stadt die geringste Einwohnerzahl mit 19300.

26.3



26.4

$$\int_0^{15} \left[20 \cdot \left(-e^{-0,05t} + e^{-0,25t} + 1,5 \right) \right] dt = \left[20 \cdot \left(20e^{-0,05t} - 4e^{-0,25t} + 1,5t \right) \right]_0^{15} =$$

$$= \left[400e^{-0,05t} - 20e^{-0,25t} + 30t \right]_0^{15} = (637,07) - (320) = 317,07$$

$$\Rightarrow \text{Durchschnittliche Einwohnerzahl in 15 Jahren: } \frac{317,07}{15} \approx 21,138$$

$$\Rightarrow 21138 \cdot 500 \text{ €} = 10569000 \text{ €}$$

27.1

Stetigkeit:

$$\lim_{x \rightarrow 427} (x) = 427$$

$$x \rightarrow 427$$

$$\lim_{x \rightarrow 427} \left(1127 \ln \left(1 + \frac{x}{700} \right) - 110 \right) \approx 427$$

$$Z(427) = 427$$

$$\Rightarrow Z \text{ stetig bei } x = 427$$

Differenzierbarkeit:

$$Z'(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 < x < 427 \\ 1127 \cdot \frac{1}{1 + \frac{x}{700}} \cdot \frac{1}{700} & \text{für } 427 < x < 19000 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 427} (1) = 1$$

$$x \rightarrow 427$$

$$\lim_{x \rightarrow 427} \left(1127 \cdot \frac{1}{1 + \frac{x}{700}} \cdot \frac{1}{700} \right) = 1$$

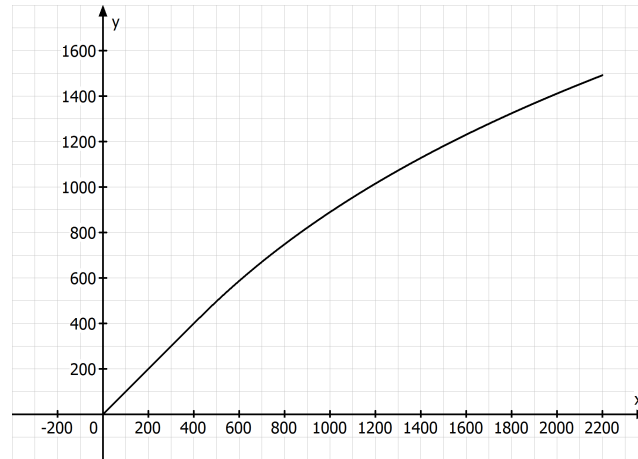
$$\Rightarrow Z \text{ differenzierbar bei } x = 427$$

27.2

$$1127 \cdot \ln \left(1 + \frac{x}{700} \right) - 110 = 1400 \Rightarrow 1127 \cdot \ln \left(1 + \frac{x}{700} \right) = 1510 \Rightarrow \ln \left(1 + \frac{x}{700} \right) = \frac{1510}{1127}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{x}{700} = e^{\frac{1510}{1127}} \Rightarrow x = \left(e^{\frac{1510}{1127}} - 1 \right) \cdot 700 \approx 1973 \text{ (Hz)}$$

27.3



28.1

$$N(0) = 5,74 \Rightarrow a \cdot e^{b \cdot 0} = 5,74 \Rightarrow a = 5,74$$

$$N(21) = 7,41034 \Rightarrow 5,74 \cdot e^{21b} = 7,41034 \Rightarrow e^{21b} = 1,291 \Rightarrow b \approx 0,01216$$

28.2

$$N(10) = 5,74 \cdot e^{0,01216 \cdot 10} \approx 6,48 \text{ Milliarden}$$

$$\frac{6,52 - 6,48}{6,52} \approx 0,006 = 0,6\% \text{ Abweichung} \Rightarrow \text{das Modell ist sehr gut;}$$

Gründe für eine Erschwernis der genauen Ermittlung der weltweiten Bevölkerung, z.B.:
Fehlende Daten, Migration, hohe Geburten- bzw. Sterbeziffern

28.3

$$N(22) - N(21) = 7,50 - 7,41 = 0,09 \text{ Milliarden}$$

Im Jahre 2017 nimmt die Weltbevölkerung um 90 Millionen Menschen zu;

28.4

$$\bullet \quad N(t) = 5,74 \cdot e^{0,01216 \cdot t} \cdot 0,01216 = 0,0697984 \cdot e^{0,01216 \cdot t}$$

$$\bullet \quad N(21) \approx 0,0901$$

Die momentane Zunahme pro Jahr beträgt zum
Jahreswechsel 2016/17 0,0901 Milliarden Menschen, was eine
gute Übereinstimmung mit der Zunahme in 2017 bedeutet.

28.5

$$N(t) = 2 \cdot N(0) \Rightarrow e^{0,01216 \cdot t} = 2 \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{0,01216} \approx 57$$

$\Rightarrow$ Die Weltbevölkerung wird sich bis 2052 verdoppelt haben.

28.6

$$N(21) = 7,41$$

$$N = 7,41 + 0,09 \cdot (2052 - 2016) = 10,65$$

Bei diesem Szenario würde Ende 2052 sich eine Bevölkerungszahl von 10,65 Milliarden Menschen ergeben.

29.1

$$p(0) = 6,38$$

$$10 \cdot e^{-0,002 \cdot 0^2 + 0,06 \cdot 0 + c} = 6,38 \Rightarrow e^c = 0,638 \Rightarrow c = \ln(0,638) \approx -0,45$$

29.2

$$\dot{p}(t) = 10 \cdot e^{-0,002t^2 + 0,06t - 0,45} \cdot (-0,004t + 0,06) = e^{-0,002t^2 + 0,06t - 0,45} \cdot (-0,04t + 0,6)$$

$$\dot{p}(t) = 0 \Rightarrow -0,04t + 0,6 = 0 \quad \text{da } e^{-0,002t^2 + 0,06t - 0,45} \text{ immer positiv} \Rightarrow t = 15$$

Skizze von $\dot{p}$: $e^{-0,002t^2 + 0,06t - 0,45}$ immer positiv

Skizze von $(-0,04t + 0,6)$:

$$\Rightarrow t = 15 \text{ Maximum}$$

Da p für $t \geq 0$ nur ein Extremum (Maximum) besitzt, tritt in diesem Bereich keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf $\Rightarrow t = 15$ absolutes Maximum

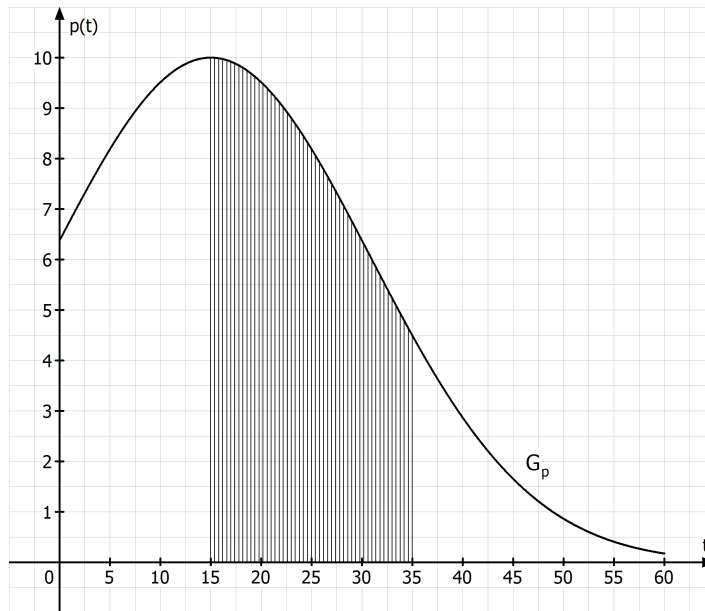
$$p(15) = 10 \text{ Millionen Fliegen}$$

29.3

$$p(31,31) - p(30,31) \approx -0,38438$$

Am 31. Tag beträgt die stärkste Abnahme 0,38 Millionen Fliegen pro 24 Stunden.

29.4



29.5

$$\bar{p} = \frac{1}{35-15} \cdot \int_{15}^{35} p(t) dt = \frac{1}{20} \cdot \int_{15}^{35} p(t) dt$$

$$\int_{15}^{35} p(t) dt \approx A_{\text{Trapez}} = \frac{10+4,5}{2} \cdot 20 = 144 \Rightarrow \bar{p} = \frac{1}{20} \cdot 144 = 7,25 \text{ Millionen}$$

30.1

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad L(0) &= 2128 \Rightarrow \frac{7500a}{a+1} + 2000 = 2128 \Rightarrow 7500a = 128(a+1) \\ &\Rightarrow 7372a = 128 \Rightarrow a = \frac{128}{7372} \approx 0,017 \\ \text{(II)} \quad L(40) &= 8822 \Rightarrow \frac{7500 \cdot 0,017}{0,017 + e^{-40k}} + 2000 = 8822 \Rightarrow \frac{127,5}{0,017 + e^{-40k}} = 6822 \\ &\Rightarrow 0,017 + e^{-40k} = \frac{127,5}{6822} \Rightarrow e^{-40k} \approx 0,00169 \\ &\Rightarrow -40k \approx -6,38 \Rightarrow k \approx 0,16 \end{aligned}$$

30.2

Jahr	1950	1955	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990
U(t)	2019	2160	2453	3024	3997	5330	6701	7752	8391
Länge	2128	2187	2551	3204	4110	5742	7292	8198	8822
O(t)	2232	2387	2712	3343	4418	5891	7406	8568	9274

Das Modell erfüllt die genannten Kriterien.

30.3

$$\frac{127,5}{0,017 + e^{-0,16t}} + 2000 > 7500 \Rightarrow \frac{127,5}{0,017 + e^{-0,16t}} > 5500 \Rightarrow 0,017 + e^{-0,16t} < \frac{127,5}{5500}$$

$$\Rightarrow e^{-0,16t} < \frac{17}{2750} \Rightarrow -0,16t < \ln\left(\frac{17}{2750}\right) \Rightarrow t > \frac{\ln\left(\frac{17}{2750}\right)}{-0,16} \approx 31,79$$

Im Jahr 1982 wurde die Gesamtlänge von 7500 Kilometern überschritten.

30.4

$$\ddot{L}(t) = 0 \Rightarrow 0,3264 \cdot e^{-0,16t} \cdot (0,017 - e^{-0,16t}) = 0$$

$$\Rightarrow 0,017 - e^{-0,16t} = 0 \Rightarrow e^{-0,16t} = 0,017 \Rightarrow t = \frac{\ln(0,017)}{-0,16} \approx 25,47$$

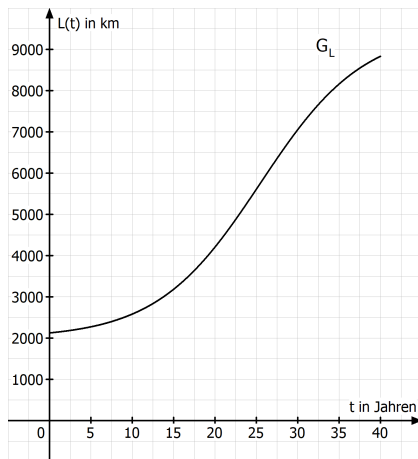
$t = 25,47$ einfache Nullstelle von $\ddot{L} \Rightarrow \text{VZW} \Rightarrow t = 25,47$ Wendestelle

$$\bullet \quad L'(t) = \frac{0 \cdot (0,017 - e^{-0,16t}) - 127,5 \cdot e^{-0,16t} \cdot (-0,16)}{(0,017 - e^{-0,16t})^2} = \frac{20,4 \cdot e^{-0,16t}}{(0,017 - e^{-0,16t})^2}$$

$$\bullet \quad L(25,47) \approx 300$$

Im Jahr 1976 stärkstes Wachstum nach Modell bei 300 km pro Jahr.

30.5



30.6

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{127,5}{0,017 + e^{-0,16t}} + 2000 \right) = 9500$$

Die Gesamtlänge aller Autobahnen nähert sich nach langer Zeit 9500 km an.

Grund: Wiedervereinigung, Förderung strukturschwacher Regionen,

31.1

$$A'(T) = \frac{0 \cdot (72 + e^{0,0106T}) - 7200 \cdot e^{0,0106T} \cdot 0,0106}{(72 + e^{0,0106T})^2} = \frac{-76,32 \cdot e^{0,0106T}}{(72 + e^{0,0106T})^2}$$

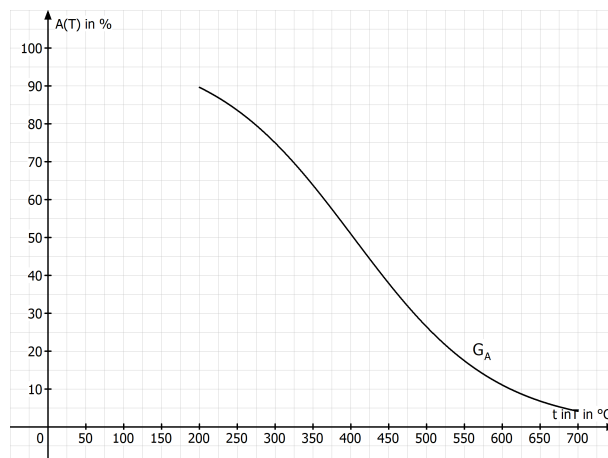
Zähler immer negativ und Nenner immer positiv $\Rightarrow A'(t)$ immer negativ
 $\Rightarrow G_A$ smf in $[200; 700]$

31.2

In der ersten Zeile muss der Nenner quadriert werden, also $\frac{\dots}{(72 + e^{0,0106T})^2}$

$$\Rightarrow A''(T) = \frac{-76,32 \cdot e^{0,0106T} \cdot 0,0106 \cdot (72 - e^{0,0106T})}{(72 + e^{0,0106T})^3}$$

31.3



WP(400|50) $\Rightarrow$ Die Ausbeute nimmt dort am stärksten ab.

32.1

$$\text{Umfang: } 2r\pi = 600 \Rightarrow r = \frac{600}{2\pi} \approx 95,49 \text{ cm} \Rightarrow \text{Durchmesser: } 190,99 \text{ cm } 1,91 \text{ m}$$

$$j(1,91) \approx 372 \text{ Jahre}$$

32.2

$$j(0,067) \approx 25 \quad j(2,95) \approx 654 \Rightarrow W = [25; 654]$$

Das Modell gilt im Alter von 25 bis 654 Jahren.

32.3

- a) scheidet aus, weil j' Nullstellen besitzt, also G_j Extrempunkte haben müsste.
d) scheidet aus, weil $G_{j'}$ zwei Extrempunkte besitzt,
also müsste G_j zwei Wendepunkte besitzen.
b) scheidet aus, weil $G_{j'}$ keinen Extrempunkt besitzt
und somit G_j keinen Wendepunkt haben dürfte.
 $\Rightarrow$ es muss c) sein, weil $G_{j'}$ einen Extrempunkt hat und deshalb G_j einen Wendepunkt besitzt.

32.4

$$j''(x) = \frac{-240(3-2x)}{(3x-x^2)^2} \quad j''(x) = 0 \Rightarrow -240(3-2x) = 0 \Rightarrow 3-2x = 0 \Rightarrow x = 1,5$$

Skizze von j'' : Nenner immer positiv

Skizze von $(-240(3-2x))$:

$$\Rightarrow x = 1,5 \text{ WP wegen VZW} \Rightarrow \text{WP}(1,5 | 328)$$

Die Zunahme des Alters ist dort bei zunehmendem Stammdurchmesser am geringsten.

33.1

$$k'(t) = 0,75 \cdot e^{-0,25t+2} + 0,75t \cdot e^{-0,25t+2} \cdot (-0,25) = \underbrace{e^{-0,25t+2}}_{>0} \cdot (0,75 - 0,1875t)$$

$$k'(t) = 0 \Rightarrow 0,75 - 0,1875t = 0 \Rightarrow t = 4$$

Skizze von k' : $e^{-0,25t+2}$ immer positiv

Skizze von $(0,75 - 0,1875t)$:

$$\Rightarrow t = 4 \text{ Maximum}$$

Da k im Bereich $[0; \infty[$ nur ein Maximum besitzt, tritt in diesem

Bereich keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf

$$\Rightarrow t = 4 \text{ absolutes Maximum}$$

$$k_{\max} = k(4) \approx 8,15 \frac{\text{mg}}{\text{l}}$$

Nach vier Stunden ist die maximale Konzentration von $8,15 \frac{\text{mg}}{\text{l}}$ erreicht.

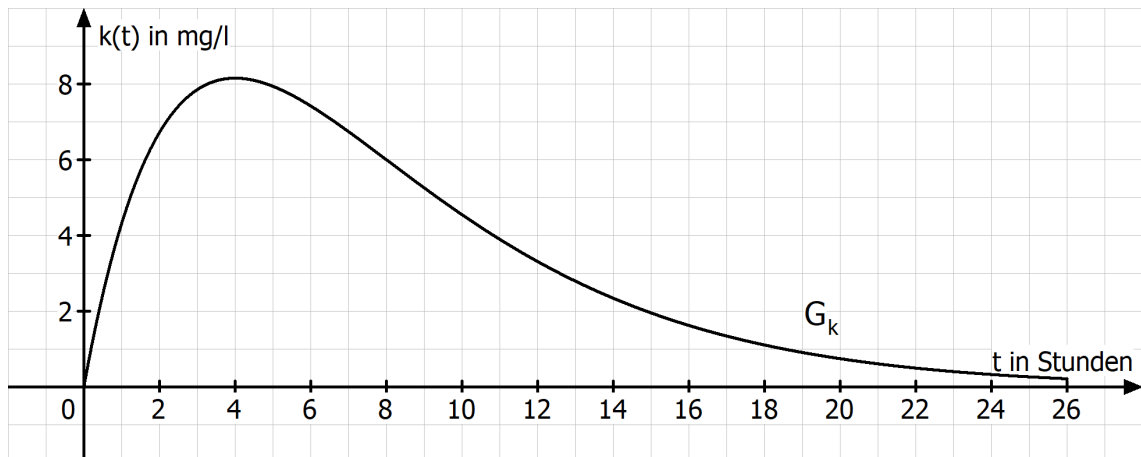
33.2

$$\begin{aligned} \int \underbrace{0,75t}_u \cdot \underbrace{e^{-0,25t+2}}_{v'} dt &= 0,75t \cdot e^{-0,25t+2} \cdot (-4) - \int 0,75 e^{-0,25t+2} \cdot (-4) dt = \\ &= -3t \cdot e^{-0,25t+2} + \int 3 e^{-0,25t+2} dt = -3t \cdot e^{-0,25t+2} + 3e^{-0,25t+2} \cdot (-4) + C = \\ &= -3t \cdot e^{-0,25t+2} - 12e^{-0,25t+2} + C \\ \int_0^{20} k(t) dt &= \left[-3t \cdot e^{-0,25t+2} - 12e^{-0,25t+2} \right]_0^{20} = (-60e^{-3} - 12e^{-3}) - (-12e^2) = \\ &= -72e^{-3} + 12e^2 \approx 85,08 \\ &\Rightarrow \frac{1}{20} \cdot 85,08 \approx 4,25 \end{aligned}$$

Die durchschnittliche Konzentration im Blut in den ersten 20 Stunden

nach Einnahme beträgt $4,25 \frac{\text{mg}}{\text{l}}$.

33.3



$$k(t) > 6 \Rightarrow t \in]1,6; 8[$$

$$33.4.1 \quad g(4) = 5 \Rightarrow 5 = 4c \cdot e^1 \Rightarrow c = \frac{5}{4 \cdot e} \approx 0,46$$

33.4.2

$$h(10) \approx 7,79 > 6$$

$\Rightarrow$ es ist mit Nebenwirkungen zu rechnen.

34.1

$$\frac{1263}{1+2,5 \cdot e^{-5a}} = 1260 \Rightarrow 1263 = 1260 \cdot (1+2,5 \cdot e^{-5a}) \Rightarrow 1+2,5 \cdot e^{-5a} = \frac{1263}{1260}$$

$$\Rightarrow 2,5 \cdot e^{-5a} = \frac{1263}{1260} - 1 \Rightarrow e^{-5a} = \frac{\frac{1263}{1260} - 1}{2,5} \Rightarrow -5a = \ln \left(\frac{\frac{1263}{1260} - 1}{2,5} \right)$$

$$\Rightarrow a = -\frac{\ln \left(\frac{\frac{1263}{1260} - 1}{2,5} \right)}{-5} \approx 1,4$$

34.2

$$V(0) = \frac{1263}{1+2,5 \cdot e^0} = \frac{1263}{3,5} \approx 360,86 \text{ ml}$$

$$\Rightarrow \frac{390}{360,86} \approx 1,08$$

Das Gehirnvolumen des untersuchten Kindes weicht etwa 8 % vom Modellwert ab.

34.3

$$\dot{V}(t) = \frac{0 \cdot (1+2,5e^{-1,4t}) - 1263 \cdot 2,5e^{-1,4t} \cdot (-1,4)}{(1+2,5e^{-1,4t})^2} = \frac{4420,5 \cdot e^{-1,4t}}{(1+2,5e^{-1,4t})^2}$$

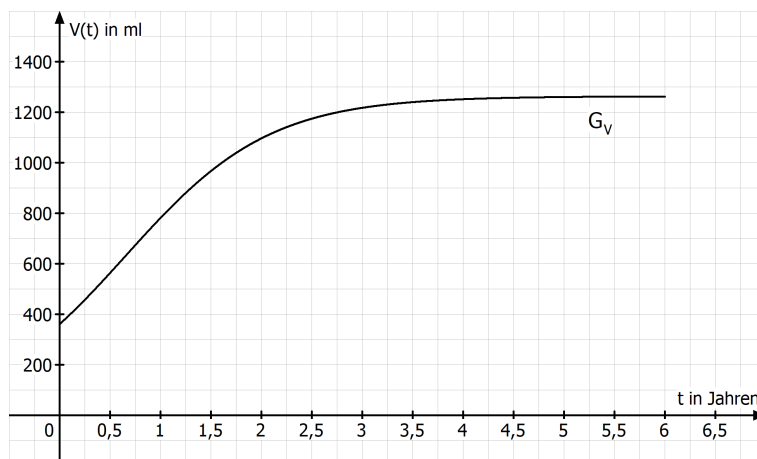
Zähler und Nenner für $t \in [0;6]$ immer positiv $\Rightarrow \dot{V}(t) > 0$ für $t \in [0;6]$

$\Rightarrow V(t)$ ist echt monoton zunehmend für $t \in [0;6]$

$$V(6) \approx 1262$$

Das durchschnittliche Gehirnvolumen am Ende des 6. Lebensjahres beträgt 1262 ml.

34.4



34.5

$$v(10) \approx 1263 < 1400$$

Die gewählte Modellfunktion beschreibt das Gehirnvolumen im Alter von 10 Jahren nicht richtig.

35.1

$$(I) S(0) = 3,80 \Rightarrow \frac{a}{1,56 - 1} = 3,80 \Rightarrow a = 2,128$$

$$(II) S(12) = 2,45 \Rightarrow \frac{2,128}{1,56e^{12b} - 1} = 2,45 \Rightarrow 2,128 = 2,45 \cdot (1,56e^{12b} - 1)$$

$$\Rightarrow 2,128 = 3,822e^{12b} - 2,45 \Rightarrow 3,822e^{12b} = 4,578 \Rightarrow e^{12b} = \frac{4,578}{3,822}$$

$$\Rightarrow 12b = \ln\left(\frac{4,578}{3,822}\right) \Rightarrow b = \frac{1}{12} \cdot \ln\left(\frac{4,578}{3,822}\right) \approx 0,015$$

35.2

$$t \rightarrow \infty \quad \frac{2,13}{\underbrace{1,56e^{0,015t} - 1}_{\rightarrow +\infty}} \rightarrow 0$$

Langfristig werden keine SMS mehr versendet.

35.3

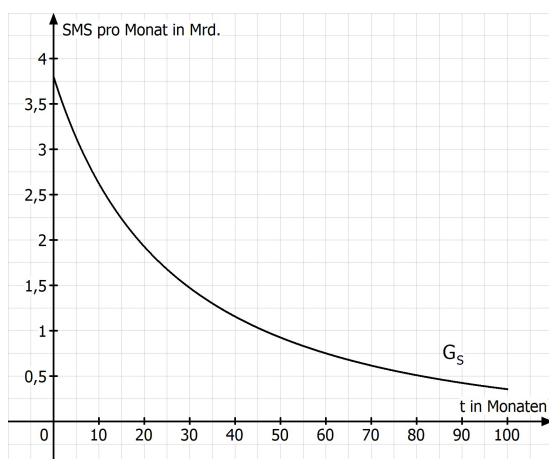
$$S'(t) = \frac{0 \cdot (1,56e^{0,015t} - 1) - 2,13 \cdot 1,56e^{0,015t} \cdot 0,015}{(1,56e^{0,015t} - 1)^2} = \frac{-0,049842e^{0,015t}}{(1,56e^{0,015t} - 1)^2}$$

Zähler immer negativ, Nenner immer positiv $\Rightarrow S'(t) < 0$ für alle $t \in \mathbb{R}_0^+$

$\Rightarrow G_s$ smf für alle $t \in \mathbb{R}_0^+$

$\Rightarrow$ Die Anzahl der pro Monat versendeten SMS sinkt ab Januar 2013.

35.4



35.5 Von Anfang 2013 bis Anfang 2020 werden insgesamt 116,98 Mrd. SMS versendet.

$$37,9 + 22,3 + 16,6 + 12,7 + 10,3 + 8,9 + 7,9 = 116,6$$

Das Modell beschreibt offensichtlich sehr gut die Anzahl der versendeten SMS in den Jahren 2013 bis 2019.

36.1

$$(I) B(0) = 4 \Rightarrow \frac{A}{2 + 98e^{c \cdot 0}} = 4 \Rightarrow \frac{A}{2 + 98} = 4 \Rightarrow A = 400$$

$$(II) B(20) = 100 \Rightarrow \frac{400}{2 + 98e^{20c}} = 100 \Rightarrow 400 = 100 \cdot (2 + 98e^{20c})$$

$$\Rightarrow 4 = 2 + 98e^{20c} \Rightarrow 2 = 98e^{20c} \Rightarrow e^{20c} = \frac{1}{49}$$

$$\Rightarrow 20c = \ln\left(\frac{1}{49}\right) \Rightarrow c = \frac{1}{20} \cdot \ln\left(\frac{1}{49}\right) \approx -0,2$$

36.2

$$\frac{400}{2 + 98e^{-0,2t}} = 170 \Rightarrow 400 = 170 \cdot (2 + 98e^{-0,2t}) \Rightarrow 2 + 98e^{-0,2t} = \frac{400}{170}$$

$$\Rightarrow 98e^{-0,2t} = \frac{6}{17} \Rightarrow e^{-0,2t} = \frac{3}{833} \Rightarrow -0,2t = \ln\left(\frac{3}{833}\right) \Rightarrow t = -5 \cdot \ln\left(\frac{3}{833}\right) \approx 28,1$$

Am 29. Tag wird die Mindesthöhe von 170 cm erreicht.

36.3

$$t \rightarrow \infty \quad \underbrace{\frac{400}{2 + 98e^{-0,2t}}}_{\rightarrow 2} \rightarrow 200$$

Langfristig erreichen die Bambuspflanzen eine Höhe von 2 m.

36.4

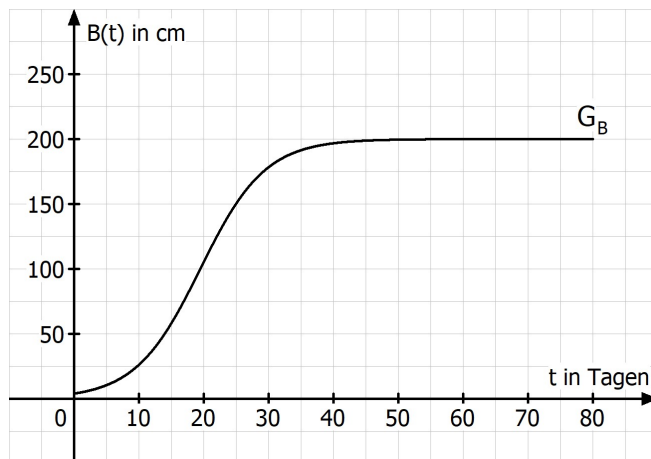
$$B'(t) = \frac{0 - 400 \cdot 98e^{-0,2t} \cdot (-0,2)}{(2 + 98e^{-0,2t})^2} = \frac{7840e^{-0,2t}}{(2 + 98e^{-0,2t})^2}$$

$$B'(t) = 0 \Rightarrow 7840e^{-0,2t} = 0 \quad (f) \Rightarrow \text{keine Nullstellen}$$

VZU von B' : Nenner immer positiv Zähler immer positiv

$$\Rightarrow B'(t) > 0 \text{ für } t \in [0; \infty[\Rightarrow G_B \text{ sms in } [0; \infty[$$

36.5



37.1 $w(1) \approx 1,85$ $t \rightarrow \infty \quad \frac{e^{2t} + 60e^t - 60}{e^{2t} + 10e^t + 25} \rightarrow 1$

37.2

$$\frac{e^{2t} + 60e^t - 60}{e^{2t} + 10e^t + 25} = 1 \Rightarrow e^{2t} + 60e^t - 60 = e^{2t} + 10e^t + 25$$

$$\Rightarrow 50e^t = 85 \Rightarrow e^t = \frac{85}{50} \Rightarrow t = \ln\left(\frac{85}{50}\right) \approx 0,53$$

Nach Zeichnung gilt, dass nach 0,53 s der Wasserdurchfluss erstmals über $1,0 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$ liegt.

37.3 $(e^t + 5)^2 = (e^t)^2 + 2 \cdot 5 \cdot e^t + 25 = e^{2t} + 10e^t + 25$

37.4

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= \frac{(e^{2t} \cdot 2 + 60e^t)(e^t + 5)^2 - (e^{2t} + 60e^t - 60) \cdot 2(e^t + 5) \cdot e^t}{(e^t + 5)^4} = \\ &= \frac{(e^{2t} \cdot 2 + 60e^t)(e^t + 5) - (e^{2t} + 60e^t - 60) \cdot e^t}{(e^t + 5)^3} = \\ &= \frac{2e^{3t} + 60e^{2t} + 10e^{2t} + 300e^t - 2e^{3t} - 120e^{2t} + 120e^t}{(e^t + 5)^3} = \frac{-50e^{2t} + 420e^t}{(e^t + 5)^3} \end{aligned}$$

$$\dot{w}(t) = 0 \Rightarrow -50e^{2t} + 420e^t = 0 \Rightarrow \underbrace{e^t}_{>0} \cdot (-50e^t + 420) = 0$$

$$\Rightarrow -50e^t + 420 = 0 \Rightarrow e^t = 8,4 \Rightarrow t = \ln(8,4) \approx 2,13$$

$$w(2,13) \approx 2,87$$

Nach etwa 2,13 Sekunden wird der maximale Wasserdurchfluss von $2,87 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$ erreicht.

38.1

$$K'(x) = 2 \left(e^{0,25x-1,25} \cdot 0,25 + e^{-0,25x+1,25} \cdot (-0,25) \right) = 0,5 \left(e^{0,25x-1,25} - e^{-0,25x+1,25} \right)$$

$$K'(x) = 0 \Rightarrow e^{0,25x-1,25} - e^{-0,25x+1,25} = 0 \Rightarrow e^{0,25x-1,25} = e^{-0,25x+1,25}$$

$$\Rightarrow 0,25x - 1,25 = -0,25x + 1,25 \Rightarrow 0,5x = 2,5 \Rightarrow x = 5$$

VZU von K' :

$$\Rightarrow x = 5 \text{ TIP} \quad \text{TIP}(5|4)$$

$\Rightarrow x = 5$ absoluter Tiefpunkt, weil in D_K keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens vorliegt

38.2

$$p(x) = a \cdot (x-5)^2 + 4$$

$$Q \Rightarrow a \cdot (0-5)^2 + 4 = 7,554 \Rightarrow 25a = 3,554 \Rightarrow a = 0,14216$$

$$\Rightarrow p(x) = 0,14216(x-5)^2 + 4$$

38.3

$$d(x) = p(x) - K(x) \quad x \in]0;5[$$

1. Ableitung bilden $d'(x) = p'(x) - K'(x)$; Nullstellen von d' berechnen;
lokales und absolutes Maximum bestimmen

39.1

$$h'(x) = -1e^x + (2-x)e^x = e^x(1-x)$$

$$h'(x) = 0 \Rightarrow 1-x = 0 \Rightarrow x = 1$$

Skizze von h' : e^x immer positiv

Skizze von $(1-x)$:

$$\Rightarrow x = 1 \text{ HOP} \quad \text{HOP}(1|e) \Rightarrow D(1|e)$$

39.2 Masse: $m = \int_{-4}^2 h(x) dx \cdot 100 \cdot 1,8 \cdot 1,06$

40.1 $k(0) = 9 \Rightarrow 9 = a \cdot 1 \cdot e^0 \Rightarrow a = 9$

40.2

$$k'(x) = 18x \cdot e^{-x} + 9(x^2 + 1) \cdot e^{-x} \cdot (-1) = 9e^{-x}(2x - x^2 - 1)$$

$$k'(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow -(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow P(1|18e^{-1})$$

40.3

$$K'(x) = (-18x - 18) \cdot e^{-x} + (-9x^2 - 18x - 27) \cdot e^{-x} \cdot (-1) =$$

$$= e^{-x} (-18x - 18 + 9x^2 + 18x + 27) = e^{-x} (9x^2 + 9) = 9e^{-x} (x^2 + 1) = k(x)$$

$\Rightarrow K$ ist Stammfunktion von k

$$\int_0^{10} k(x) dx = \left[-9(x^2 + 2x + 3)e^{-x} \right]_0^{10} = \left[-9 \cdot (100 + 20 + 3)e^{-10} \right] - \left[-9 \cdot 3 \cdot e^0 \right] =$$

$$= -1107e^{-10} + 27 \approx 26,95 \Rightarrow 20 \cdot 26,95 = 539$$

Das Volumen der 20 cm langen Berglandschaft beträgt 539 cm^3 .

40.4

$$V = 100 \cdot 26,95 = 2695$$

$$\text{Kosten: } 59,90 \cdot 2,695 \approx 161,43 \text{ €}$$

40.5.1

$$\ln(-x^2 + 4x) + 2 = 0 \Rightarrow \ln(-x^2 + 4x) = -2 \Rightarrow -x^2 + 4x = e^{-2} \Rightarrow -x^2 + 4x - e^{-2} = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot (-1) \cdot (-e^{-2})}}{-2} = \frac{-4 \pm 3,93}{-2} \Rightarrow x_1 \approx 0,04 \quad x_2 \approx 3,97$$

40.5.2

$$h'(x) = \frac{1}{-x^2 + 4x} \cdot (-2x + 4) = \frac{-2x + 4}{-x^2 + 4x}$$

$$h'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow H(2 | \ln(4) + 2)$$

41.1

$$M(t) = \frac{a}{1 + 9e^{bt}}$$

$$(I) \quad M(0) = 0,8 \Rightarrow \frac{a}{1 + 9e^0} = 0,8 \Rightarrow \frac{a}{10} = 0,8 \Rightarrow a = 8$$

$$(II) \quad M(3) = 5,0 \Rightarrow \frac{a}{1 + 9e^{3b}} = 5,0 \Rightarrow \frac{8}{1 + 9e^{3b}} = 5,0 \Rightarrow 8 = 5(1 + 9e^{3b})$$

$$\Rightarrow 8 = 5 + 45e^{3b} \Rightarrow 45e^{3b} = 3 \Rightarrow e^{3b} = \frac{1}{15} \Rightarrow 3b = \ln\left(\frac{1}{15}\right)$$

$$\Rightarrow b = \frac{\ln\left(\frac{1}{15}\right)}{3} \approx -0,9$$

41.2.1

$$M(t) = \frac{8}{1 + 9e^{-0,9t}}$$

$$\dot{M}(t) = \frac{0 \cdot (1 + 9e^{-0,9t}) - 8 \cdot 9e^{-0,9t} \cdot (-0,9)}{(1 + 9e^{-0,9t})^2} = \frac{64,8 \cdot e^{-0,9t}}{(1 + 9e^{-0,9t})^2}$$

Zähler und Nenner immer positiv $\Rightarrow G_M$ sms in $[0; \infty[$

41.2.2

$$\ddot{M}(t) = -58,32 \cdot e^{-0,9t} \cdot \frac{1 - 9e^{-0,9t}}{(1 + 9e^{-0,9t})^3}$$

$$\ddot{M}(t) = 0 \Rightarrow \frac{1 - 9e^{-0,9t}}{(1 + 9e^{-0,9t})^3} = 0 \quad \text{weil } -58,32 \cdot e^{-0,9t} < 0$$

$$\Rightarrow 1 - 9e^{-0,9t} = 0 \Rightarrow 9e^{-0,9t} = 1 \Rightarrow e^{-0,9t} = \frac{1}{9} \Rightarrow -0,9t = \ln\left(\frac{1}{9}\right)$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{\ln\left(\frac{1}{9}\right)}{-0,9} \approx 2,4$$

Skizze von $\ddot{M}$: $-58,32 \cdot e^{-0,9t}$ immer negativ; $(1 + 9e^{-0,9t})^3$ immer positiv

Skizze von $(1 - 9e^{-0,9t})$:

$\Rightarrow t_1 = 2,4$ Maximum von $\dot{M}$

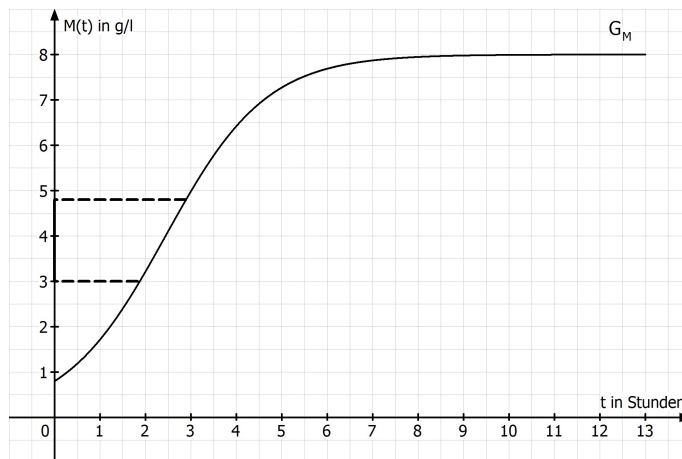
Bei $t_1 = 2,4$ einziger Monotoniewechsel im betrachteten Bereich

$\Rightarrow t_1 = 2,4$ absolutes Maximum von $\dot{M}$

$$M(2,4 + 0,5) - M(2,4 - 0,5) = M(2,9) - M(1,9) = 4,8 - 3,0 = 1,8$$

Im Zeitraum von 1,9 Stunden bis 2,9 Stunden findet eine Zunahme der Milchsäurekonzentration von etwa 1,8 Gramm pro Liter statt.

41.2.3



41.2.4

$$G'(t) = \frac{80}{9} \cdot \frac{1}{9 + e^{0,9t}} \cdot e^{0,9t} \cdot 0,9 = \frac{8e^{0,9t}}{9 + e^{0,9t}} = \frac{8}{e^{-0,9t}(9 + e^{0,9t})} =$$

$$= \frac{8}{9e^{-0,9t} + e^0} = \frac{8}{9e^{-0,9t} + 1} = M(t)$$

$\Rightarrow G$ ist Stammfunktion von M

41.2.5

$$\int_0^6 M(t) dt = \left[\frac{80}{9} \ln(9 + e^{0,9t}) \right]_0^6 = 48,4 - 20,5 = 27,9$$

$$\Rightarrow \bar{M} = \frac{1}{6} \cdot 27,9 \approx 4,7 \frac{\text{g}}{\text{l}}$$

42.1

t in Jahren	0	20	50	100
h(t)	2,03	6,79	27,15	52,01

Die Daten stehen mit den Baumhöhen der Modellfunktion im Einklang.

42.2

$$h'(t) = \frac{0 \cdot (2 + 51e^{-0,065t}) - 108 \cdot 51e^{-0,065t} \cdot (-0,065)}{(2 + 51e^{-0,065t})^2} = \frac{358,02 \cdot e^{-0,065t}}{(2 + 51e^{-0,065t})^2}$$

$$\frac{358,02 \cdot e^{-0,065t}}{(2 + 51e^{-0,065t})^2} = 0,78 \Rightarrow 358,02 \cdot e^{-0,065t} = 0,78 \cdot (2 + 51e^{-0,065t})^2$$

$$\Rightarrow 358,02 \cdot e^{-0,065t} = 0,78 \cdot (4 + 204e^{-0,065t} + 2601 \cdot (e^{-0,065t})^2)$$

$$\Rightarrow 459 \cdot e^{-0,065t} = 4 + 204e^{-0,065t} + 2601 \cdot (e^{-0,065t})^2$$

$$\Rightarrow 2601 \cdot (e^{-0,065t})^2 - 255e^{-0,065t} + 4 = 0$$

Substitution: $u = e^{-0,065t}$

$$\Rightarrow 2601u^2 - 255u + 4 = 0$$

$$\Rightarrow u_{1/2} = \frac{255 \pm \sqrt{65025 - 4 \cdot 2601 \cdot 4}}{5202} = \frac{255 \pm 153}{5202}$$

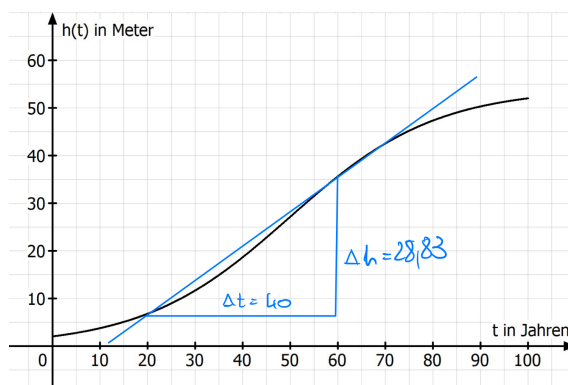
$$\Rightarrow u_1 = \frac{4}{51} \quad u_2 = \frac{1}{51}$$

Resubstitution:

$$1) e^{-0,065t} = \frac{4}{51} \Rightarrow -0,065t = \ln\left(\frac{4}{51}\right) \Rightarrow t \approx 39,16 \text{ Jahre}$$

$$2) e^{-0,065t} = \frac{1}{51} \Rightarrow -0,065t = \ln\left(\frac{1}{51}\right) \Rightarrow t \approx 60,49 \text{ Jahre}$$

42.3



$$42.4 \quad \frac{h(60) - h(20)}{60 - 20} = \frac{35,62 - 6,79}{40} = 0,72 \text{ m / Jahr}$$

42.5

$$h(t) = \frac{108}{2 + 51e^{-0,065t}} \cdot \frac{e^{0,065t}}{e^{0,065t}} = \frac{108e^{0,065t}}{2e^{0,065t} + 51}$$

$$\text{Ableitung von } (2e^{0,065t} + 51): \quad 2e^{0,065t} \cdot 0,065t = 0,13e^{0,065t}$$

$$108 = x \cdot 0,13 \Rightarrow x = 830,77$$

$$\Rightarrow H(t) = 830,77 \cdot \ln|2e^{0,065t} + 51|$$